REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kasdi Merbah, Ouargla
Département de Mathématiques

NOTE SUR LA GEOMETRIE AFFINE EUCLIDIENNE

Nadji HERMAS

1 Introduction

Le but de cette polycopie est de donner un exposé très court de la géométrie affine euclidienne tel qu'il s'est réellement assemblé durant les années universitaires 1998/1999, 2009/2010 et 2010/2011 et professé au département de mathématiques de l'université Kasdi Merbah à Ouargla.

On rappelle que l'organisation la plus célèbre des matières de la géométrie est faite par le géomètre Euclid, qui était très actif autour 300 ans avant J.-C. Euclid a collecté et rehaussé les travaux de plusieurs mathématiciens avant lui comme Apollonius, Hippocrates et Eudoxus. Son texte scolaire nommé 'Les éléments', a été utilisé pratiquement et de façon continue pendant 2000 années, en le faisant le livre scolaire le plus célèbre dans l'histoire.

Dans la géométrie plane d'Euclid, on étudie les points, les droites affines, les cercles et, en général, les courbes construites dans le plan en utilisant 'seulement' la règle et le compas.

La géométrie affine euclidienne est considérée comme un texte moderne et abstrait de la géométrie euclidienne plane. Dans cette géométrie, on utilise l'outil des "système de coordonnées cartésiennes" introduits par Descartes pour étudier non seulement les droites affines, les cercles et les sphères mais aussi des objets géométriques de nature compliquée.

Ce texte est divisé en trois sections.

Dans la section 2, on donne les définitions des espaces affines, des applications affines et des groupes affines, et on expose également quelques propriétés élémentaires liées aux espaces affines.

Dans la section 3, on présente les définitions des espaces affines euclidiens et les isométries affines ainsi que quelques propriétés élémentaires liées à ces notions. En particulier, on discute de façon détaillée la démonstration d'un théorème fondamentale décrivant la structure du groupe des isométries affines d'un espace affine euclidien de dimension finie.

2 GÉOMÉTRIE AFFINE

2.1 Espaces affines

Définition 2.1. Soit E un ensemble arbitraire, $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$), et $\Phi : (A, B) \in E \times E \mapsto \Phi(A, B) = \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{E}$ une application vérifiant les deux conditions :

a) L'application $\Phi_A : B \in E \mapsto \Phi_A(B) = \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{E}$ est une bijection.

b) Pour tout $(A, B, C) \in E \times E \times E$, on a la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

E muni de l'application Φ s'appelle "espace affine" de direction $\overrightarrow{E}$.

On pose par définition $\dim E = \overrightarrow{E}$.

Exemple 2.2. Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel. Alors $\overrightarrow{E}$ muni de l'application $\left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\right) \in \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{X} - \overrightarrow{Y} \in \overrightarrow{E}$ est un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.

Exemple 2.3. Soit E_1 et E_2 deux espaces affines dirigés respectivement par $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$. Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ muni de l'application

$$\begin{array}{rcl}(A_1, A_2, B_1, B_2) & \in & E_1 \times E_2 \times E_1 \times E_2 \\ & \mapsto & \left(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}\right) \in \overrightarrow{E_1} \times \overrightarrow{E_2}\end{array}$$

est un espace affine dirigé par $\overrightarrow{E_1} \times \overrightarrow{E_2}$.

Remarque 2.4. D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AA} = 0$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ quel que soit $(A, B) \in E \times E$.

Remarque 2.5 (Règle du parallélogramme). Soit $(A, B, C, D) \in E^4$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}.$$

Par suite $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$. Ceci prouve que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Remarque 2.6. Soit E un espace affine dirigé par $\overrightarrow{E}$. On peut munir E d'une infinité de structures vectorielles de la façon suivante : On fixe un point $O \in E$ et on transporte la structure vectorielle de l'espace dirigeant $\overrightarrow{E}$ à E par la bijection $A \in E \mapsto \overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{E}$. Dans ce cas, on a

$$A + B = C \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

et le point O est le zéro de l'espace vectoriel E.

On signale que cette structure vectorielle sur E n'est pas naturelle et n'est pas canonique puisque elle dépend du point O.

Définition 2.7 (Sous-espaces affines)**.** Soit E un espace affine dirigé par $\overrightarrow{E}$. Un sous-ensemble F de E est dit "sous-espace affine" de E si : ou bien $F = \phi$, ou bien il existe un point $O \in F$ tel que $\Phi_O(F)$ soit un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

La définition précédente ne dépend pas du point O. Plus précisément, on a la

Proposition 2.8. *Soit E un espace affine dirigé par $\overrightarrow{E}$ et F un sous-espace affine de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel unique $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{F} = \Phi_O(F)$ quel que soit $O \in F$. De plus, F est un espace affine dirigé par $\overrightarrow{F}$.*

Démonstration. Comme F est un sous-espace affine de E, il existe un point $O \in F$ tel que $\overrightarrow{F} = \Phi_O(F) = \left\{\overrightarrow{OA} : A \in F\right\}$ soit un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

Soit O' un point arbitraire de F. Pour tout $A \in F$, on a

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'} \in \overrightarrow{F}$$

puisque $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OO'}\right) \in \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Donc $\left\{\overrightarrow{O'A} : A \in F\right\} \subset \overrightarrow{F}$.

Soit $B \in F$. Il existe un seul point $C \in E$ tel que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'C}$. Par conséquent $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{F}$ et $C \in F$. Par suite $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'C} \in \left\{\overrightarrow{O'A} : A \in F\right\}$ et $\overrightarrow{F} \subset \left\{\overrightarrow{O'A} : A \in F\right\}$.

Finalement, il vient $\overrightarrow{F} = \left\{\overrightarrow{O'A} : A \in F\right\}$. □

Remarque 2.9. Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel. Alors tout sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$ est de la forme $a + \overrightarrow{F}$, avec $a \in \overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

Exemple 2.10. Soit E un espace affine. Alors tout ensemble $\{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de dimension 0.

Les sous-espaces affines de dimension 1 (respectivement 2) sont appelés "droites affines" (respectivement "plans affines").

Exemple 2.11. Soit $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ deux espaces vectoriels et $f : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire. Alors quel que soit $y \in \mathrm{Im} f = \left\{f(x) : x \in \overrightarrow{E}\right\}$, $f^{-1}\{y\} = \left\{x \in \overrightarrow{E} : f(x) = y\right\}$ est un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$ dirigé par $\ker f$.

En effet, il suffit de voir que $f^{-1}\{y\} = x + \ker f$ avec $x \in f^{-1}\{y\}$.

Par conséquent, si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}$, alors les solutions $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'équation $\sum_{1 \leq j \leq n} a_j x_j = b$ constitue un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 2.12. *Soit E un espace affine et $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille des sous-espaces affines de E. Alors l'intersection $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ est un sous-espace affine de E.*

Démonstration. On pose $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ et $\overrightarrow{F} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overrightarrow{F_\lambda}$. Il est évident que $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. On fixe un point $O \in F$ et soit $A \in F$. Alors $A \in F_\lambda$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$. Par conséquent $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{F_\lambda}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donc $\overrightarrow{OA} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overrightarrow{F_\lambda} = \overrightarrow{F}$ et $\left\{\overrightarrow{OA} : A \in F\right\} \subset \overrightarrow{F}$.

Soit $u \in \overrightarrow{F}$. Donc $u \in \overrightarrow{F_\lambda}$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$. Par suite, il existe $A \in F_\lambda$ tel que $\overrightarrow{OA} = u$. D'où $A \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ et $u \in \left\{\overrightarrow{OA} : A \in F\right\}$.

Finalement, on a prouvé que $\left\{\overrightarrow{OA} : A \in F\right\} = \overrightarrow{F}$. □

Définition 2.13. Etant donné un espace affine E et un sous-ensemble $S \subset E$, l'intersection de de tous les sous-espaces affines contenant S s'appelle "sous-espace affine engendré par S". On le note $\langle S \rangle$.

Définition 2.14. Etant donné $(k+1)$ points A_0, A_1,..., A_k d'un espace affine E. On dit que ces points sont affinement indépendants si

$$\dim\langle\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}\rangle = k.$$

Si $k = \dim E$, on dit que $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ est une base affine de E, dans ce cas, $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2} \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right\}$ est une base vectorielle de $\overrightarrow{E}$.

Définition 2.15. Etant donné deux espaces affines F_1 et F_2 d'un espace affine E. On dit que F_1 et F_2 sont parallèles si $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$.

Exemple 2.16. Soit $f : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire. Alors les sous-espaces $f^{-1}(\{u\})$, $u \in \mathrm{Im} f$, sont parallèles.

Proposition 2.17. *Etant donné deux espaces affines parallèles F_1 et F_2 d'un espace affine E. Alors ou bien $F_1 = F_2$ ou bien $F_1 \cap F_2 = \phi$.*

Démonstration. On suppose que $F_1 \cap F_2 \neq \phi$. Il existe alors au moins un point $O \in F_1 \cap F_2$. Soit $A \in F_1$. Donc $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$ et $A \in F_2$. D'où $F_1 \subset F_2$. De même, on prouve que $F_2 \subset F_1$. □

Proposition 2.18 (Axiome de parallèle)**.** *Etant donné un point $A \in E$ et une droite affine $\Delta \subset E$, il existe une unique droite affine $\widetilde{\Delta}$ passant par A telle que $\Delta \| \widetilde{\Delta}$.*

La géométrie affine vérifie le cinquième postulat d'Euclide.

Exercise 1. Soit F et G deux sous-espaces affines de E. On cosidère deux points $A \in F$ et $B \in G$. Prouver l'équivalence suivante :

$$F \cap G = \phi \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}.$$

Exercise 2. Soit F et G deux sous-espaces affines non vides de E tels que $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$. Montrer que, quel que soit $\widetilde{F} \| F$, $\widetilde{F} \cap G \neq \phi$.

2.2 Applications affines

Définition 2.19. Soit E et F deux espaces affines. Alors une application $f : E \to F$ est dite "application affine" s'il existe un point $O \in E$ et une application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ tels que

$$\overrightarrow{f(O)\, f(A)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right), A \in E.$$

Puisque

$$\overrightarrow{f(A)\, f(B)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right), (A, B) \in E \times E,$$

l'application linéaire $\overrightarrow{f}$ (si elle existe) est unique.

Exercise 3. Soit $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ deux espaces vectoriels et $f : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application affine. Montrer qu'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ telle que

$$f(u) = f(0) + \overrightarrow{f}(u), u \in \overrightarrow{E}.$$

Proposition 2.20. *Soit E et F deux espaces affines et $f : E \to F$ une application affine. Alors l'image directe d'un sous-espace affine de E par f est un sous-espace affine de F, et l'image inverse d'un sous-espace affine de F par f est un sous-espace affine de E.*

Démonstration. C'est un exercice. □

Proposition 2.21. *L'image du barycentre des masses ponctuelles*

$$\{(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k)\}$$

par l'application affine $f : E \to F$ est le barycentre des masses ponctuelles

$$\{(f(A_1), \alpha_1), \ldots, (f(A_k), \alpha_k)\}.$$

Inversement, si f vérifie cet énoncé pour tous les masses ponctuelles de E, alors elle est affine.

Démonstration. - On démontre le premier énoncé. Soit M le barycentre des masses ponctuelles $\{(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k)\}$. Alors

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{1 \le j \le k} \alpha_j \overrightarrow{OA_j}$$

où O est un point quelconque de E. Par suite

$$\overrightarrow{f(O) f(M)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \sum_{1 \le j \le k} \alpha_j \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA_j}\right) = \sum_{1 \le j \le k} \alpha_j \overrightarrow{f(O) f(A_j)}.$$

Donc $f(M)$ est le barycentre de $\{(f(A_1), \alpha_1), \ldots, (f(A_k), \alpha_k)\}$.

On démontre le deuxième énoncé. On fixe un point $O \in E$ et on définit une application $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ comme suit

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{f(O) f(A)}, A \in E.$$

On va montrer que $\overrightarrow{f}$ est linéaire. Soit $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe un point $M \in E$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA}$. Comme M est le barycentre des masses ponctuelles $\{(A, \lambda), (O, 1 - \lambda)\}$, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}\left(\lambda \overrightarrow{OA}\right) &= \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{f(O) f(M)} = \lambda \overrightarrow{f(O) f(A)} + (1 - \lambda) \overrightarrow{f(O) f(O)} \\
&= \lambda \overrightarrow{f(O) f(A)} = \lambda \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right).
\end{aligned}$$

Soit $(A, B) \in E \times E$. Si M désigne le barycentre des masses ponctuelles $\{(A, 1/2), (B, 1/2)\}$, alors $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$. Par suite

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) &= \overrightarrow{f}\left(2\overrightarrow{OM}\right) = 2\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) = 2\overrightarrow{f(O) f(M)} \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{f(O) f(A)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(O) f(B)}\right) \\
&= \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OB}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{f}$ est linéaire. □

Exercise 4. Soit $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est une base affine de E et $f : E \to E$ une application affine tel que $f(A_j) = A_j$ quel que soit $j \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que $f = Id$.

2.3 Groupe affine

Proposition 2.22. *1. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications affines, alors $g \circ f : E \to G$ est l'aussi, de plus, on a la relation $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.*

2. Une application affine $f : E \to F$ est bijective si, et seulement si, $\overrightarrow{f}$ est bijective, et dans ce cas, l'application inverse f^{-1} est affine et on a la formule $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.

3. Les bijections affines de E dans E constitue un groupe au sens de l'algèbre dit "groupe affine de E", et on le note $GA(E)$.

4. L'application $f \in GA(E) \mapsto \overrightarrow{f} \in GL\left(\overrightarrow{E}\right)$ est un homomorphisme des groupes surjective, de plus son noyau est le sous-groupe des translations de E.

Exercise 5. Etant donné deux espaces affines E et F et une application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$, montrer que, pour tous deux points $O \in E$ et $O' \in F$, il existe une unique application affine $f : E \to F$ associée à $\overrightarrow{f}$ telle que $f(O) = O'$.

Exercise 6. Soit E un espace affine. Montrer que, pour tout point $O \in E$ et toute application affine $f : E \to E$, il existe un seul vecteur $u \in \overrightarrow{E}$ et une seule application affine $g : E \to E$ tels que $g(O) = O$ et $t_u \circ g = f$.

Exercise 7. Etant donné $u \in \overrightarrow{E}$ et $f \in GA(E)$, vérifier que $f \circ t_u \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(u)}$.

Remarque 2.23. Etant donné un espace affine E et une application affine $f : E \to E$. Si $\varphi \in GA(E)$, l'application affine $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est l'application affine conjuguée de f par φ. f et $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ possèdent la même nature géométrique.

Exercise 8. Soit $f : E \to E$ une application affine. Montrer que f possède au plus un point fixe si, et seulement si, $\overrightarrow{f}$ est injective.

3 GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE

3.1 Espaces affines euclidiens

Définition 3.1. Etant donné un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$, un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}$ est une application bilinéaire

$$(u,v) \in \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E} \mapsto u \cdot v \in \mathbb{R};$$

- symétrique ; $u \cdot v = v \cdot u$ quel que soit $(u,v) \in \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E}$.
- positive ; $u \cdot u \geq 0$ quel que soit $u \in \overrightarrow{E}$.
- non dégénéré ; $u \cdot v = 0$ quel que soit $v \in \overrightarrow{E}$, alors $u = 0$.

$\overrightarrow{E}$ muni de ce produit scalaire est dit "espace euclidien" et on note $\|u\|$ la quantité $u \cdot u$.

Remarque 3.2. Soit $f : (u,v) \in \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E} \mapsto f(u,v) \in \mathbb{R}$ une application bilénéair symétrique positive. On vérifie que l'on a l'inégalité de Schwarz :

$$|f(u,v)| \leq \sqrt{f(u,u)}\sqrt{f(v,v)}, \forall (u,v) \in \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E}.$$

Pour tout $(\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E}$, on écrit

$$0 \leq f(\lambda u + v, \lambda u + v) = \lambda^2 f(u,u) + 2\lambda f(u,v) + f(v,v).$$

Si $f(u,u) \neq 0$, alors le discriminant de ce trinôme est négatif, d'où

$$f(u,v)^2 - f(u,u)\, f(v,v) \leq 0,$$

et si $f(u,u) = 0$, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : 2\lambda f(u,v) + f(v,v) \geq 0.$$

Donc $f(u,v) = 0$, ce qui entraîne encore l'inégalité de Schwarz.

Il découle de cette affirmation que, pour que f soit un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}$, il faut et il suffit que

$$f(u,u) > 0, \forall u \in \overrightarrow{E}.$$

Définition 3.3. Etant donné un espace affine E, on dit que E est un espace affine euclidien si l'espace vectoriel dirigeant $\overrightarrow{E}$ est un espace euclidien.

La distance entre les points A et B de E, est définie par la relation

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.$$

Ainsi donc l'inégalité de Schwarz

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C), (A,B,C) \in E^3.$$

3.2 Isométries affines

Définition 3.4. Soit E et F deux espaces affines euclidiens. Une application affine $f : E \to F$ est dite une isométrie affine si elle conserve la distance euclidienne de E, c'est-à-dire

$$\left\| \overrightarrow{f(A)\, f(B)} \right\| = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|, \forall (A, B) \in E \times E,$$

où encore

$$\left\| \overrightarrow{f}(u) \right\| = \| \overrightarrow{u} \|, \forall u \in \overrightarrow{E}.$$

Proposition 3.5. *Pour que l'application affine $f : E \to F$ soit une isométrie affine il faut et il suffit que $\overrightarrow{f}$ conserve le produit scalaire de $\overrightarrow{E}$, c'est-à-dire*

$$\overrightarrow{f}(u) \cdot \overrightarrow{f}(v) = u \cdot v, (u, v) \in \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E}.$$

Démonstration. Il suffit de voir que

$$u \cdot v = \frac{1}{4} \left\{ \| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 \right\}.$$

□

Proposition 3.6. *L'ensemble $OA(E)$ des transformations isométriques de E est un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$.*

Démonstration. Soit $(f, g) \in O(E)$. Si $u \in \overrightarrow{E}$, alors on écrit

$$\left\| \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}(u) \right\| = \left\| \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{f}(u) \right) \right\| = \left\| \overrightarrow{f}(u) \right\| = \|u\|.$$

Donc $g \circ f \in O(E)$. □

Remarque 3.7. Si E est de dimension finie, alors toute application isométrique de E dans lui même, est une transformation isométrique.

Exemple 3.8. Soit F un sous-espace affine d'un espace affine de dimension finie E. La symétrie orthogonale par rapport à F est définie comme suit :

$$\sigma_F(M) = M'$$

avec

$$\overrightarrow{OM'} = s_{\overrightarrow{F}}\left(\overrightarrow{OM} \right) = \begin{cases} \overrightarrow{OM} \text{ si } \overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{F} \\ -\overrightarrow{OM} \text{ si } \overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{F}^{\perp} \end{cases}$$

et O est un point arbitraire de F.

Alors $\sigma_F \in O(E)$.

Exemple 3.9. Soit E un espace affine de dimension finie. On appelle hyperplan de E tout sous-espace affine de E de dimension $\dim E - 1$.

Une réflexion de E est une symétrie orthogonale par un hyperplan.

Théorème 3.10. *Soit $\overrightarrow{E}$ un espace euclidien de dimension finie n. Toute application isométrique linéaire $f : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ est la composition de p réflexions de $\overrightarrow{E}$ avec $p \leq n$.*

Démonstration. On utilise l'induction sur n.

$\surd$ $n = 1$. Dans ce cas, on a $O\left(\overrightarrow{E}\right) = \left\{Id_{\overrightarrow{E}}, -Id_{\overrightarrow{E}}\right\}$. $-Id_{\overrightarrow{E}}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\{0\}$ et $Id_{\overrightarrow{E}}$ est la composition de 0 réflexions de $\overrightarrow{E}$.

$\surd$ On suppose que l'affirmation du théorème est vraie pour $m \leq n-1$, et soit $\overrightarrow{f} \in O\left(\overrightarrow{E}\right)$. On considère un vecteur v quelconque de $\overrightarrow{E}$. On a deux cas :

1) $\overrightarrow{f}(v) = v$. Soit $\overrightarrow{F} = \{v\}^{\perp}$. On vérifie d'abord que $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{F} \to \overrightarrow{F}$. Soit $u \in \overrightarrow{F}$. Alors

$$\overrightarrow{f}(u) \cdot v = \overrightarrow{f}(u) \cdot \overrightarrow{f}(v) = u \cdot v = 0.$$

Par suite, $\overrightarrow{f}(u) \in \overrightarrow{F}$. D'après l'hypothèse de l'induction, il existe des hyperplans H_1', …, H_p' de $\overrightarrow{F}$ tels que

$$\overrightarrow{f}(u) = S_{H_1'} \circ \cdots \circ S_{H_p'}(u), u \in \overrightarrow{F}.$$

Soit H_i l'espace vectoriel engendré par $H_i' \cup \{v\}$. Il est évident que H_i un hyperplan de $\overrightarrow{E}$, de plus, on a $S_{H_i}(v) = v$ et $S_{H_i}|_{\overrightarrow{F}} = S_{H_i'}$.

On vérifie que $\overrightarrow{f} = S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}$. Pour tout vecteur $u \in \overrightarrow{E}$, on a $u = w + \lambda v$ avec $w \in \overrightarrow{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(u) &= \overrightarrow{f}(w + \lambda v) = \overrightarrow{f}(w) + \lambda \overrightarrow{f}(v) \\
&= S_{H_1'} \circ \cdots \circ S_{H_p'}(w) + \lambda v \\
&= S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}(w) + S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}(\lambda v) \\
&= S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}(w + \lambda v) = S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}(u).
\end{aligned}$$

2) $\overrightarrow{f}(v) \neq v$. On pose $H = (v - f(v))^{\perp}$. On a

$$v = \frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(v - f(v)),$$

et,

$$S_H(v) = \frac{1}{2}(v + f(v)) - \frac{1}{2}(v - f(v)) = f(v).$$

Donc $S_H \circ f(v) = S_H \circ S_H(v) = v$. D'après le cas 1), existe des hyperplans H_1, …, H_p de $\overrightarrow{E}$, avec $p \leq n-1$, tels que $S_H \circ f = S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}$. D'où $f = S_H \circ S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}$. □

Théorème 3.11. *Soit E un espace affine euclidien de dimension finie n. Toute application isométrique $f : E \to E$ est la composition de p réflexions de E avec $p \leq n+1$.*

Démonstration. On considère un point arbitraire $A \in E$. On a deux cas :

a) $f(A) = A$. D'après le théorème 3.10, il existe des hyperplans $\overrightarrow{H}_1, \ldots, \overrightarrow{H}_p$ $(p \leq n)$ de $\overrightarrow{E}$ tels que $\overrightarrow{f} = S_{\overrightarrow{H}_1} \circ \cdots \circ S_{\overrightarrow{H}_p}$. On pose $H_i = \left\{M \in E : \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{H}_i\right\}$ $(1 \leq i \leq p)$. D'où

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}(M)} &= \overrightarrow{S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}(A)\, S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}(M)} \\
&= S_{\overrightarrow{H}_1} \circ \cdots \circ S_{\overrightarrow{H}_p}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) \\
&= \overrightarrow{f(A)\, f(M)} = \overrightarrow{Af(M)}.
\end{aligned}$$

Par suite, $f(M) = S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}(M)$.

b) $f(A) \neq A$. On pose $\overrightarrow{H} = \left\{\overrightarrow{Af(A)}\right\}^{\perp}$ et $H = \left\{M \in E : \overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{H}\right\}$ avec $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{Af(A)}$. On a

$$\overrightarrow{OS_H(A)} = -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{Of(A)}.$$

Donc $S_H(A) = f(A)$ et $S_H \circ f(A) = S_H \circ S_H(A) = A$. D'après le cas b), on a

$$S_H \circ f = S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p},$$

avec $H_1, \ldots, H_p$ sont des hyperplans de E $(p \leq n)$. D'où $f = S_H \circ S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_p}$. □

Exercise 9. Soit A, A', B', et B quatre points d'un espace affine E. On suppose que $AA'B'B$ est un parallélogramme. Vérifier que

$$\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AM} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'M}.$$

Exercise 10. Soit A et B deux points d'un espace affine E. Montrer qu'il existe une seule droite affine Δ passant par ces deux points.

Exercise 11. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces affines de E. Sous quelle condition, $F_1 \cup F_2$ soit un sous-espace affine de E ?

Exercise 12. Soit F un sous-ensemble de E. Montrer que, pour que F soit un sous-espace affine de E, il faut et il suffit que, pour tous deux points A et B de F, $\langle\{A, B\}\rangle \subset F$.

Exercise 13. Soit $h(O, \lambda)$ la dilatation (homothétie) du centre O et de rapport λ. Déterminer l'application $\varphi \circ h(O, \lambda) \circ \varphi^{-1}$.

Exercise 14. Soit $\overrightarrow{E}$ un espace euclidien et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Vérifier l'équivalence suivant :

$$\overrightarrow{f} \in OL\left(\overrightarrow{E}\right) \Leftrightarrow {}^{t}M_f M_f = \mathbb{I}_n,$$

où M_f dénote la matrice de $\overrightarrow{f}$ par rapport à $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

L'ensemble des matrices $M \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ vérifiant ${}^{t}MM = \mathbb{I}_n$, est un sous-groupe de $GL(n) = \{M \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) : \det M \neq 0\}$ et s'appelle "groupe des matrices orthogonales d'ordre n". On note $O(n, \mathbb{R})$ ce groupe.

On a
$$\forall \overrightarrow{f} \in OL\left(\overrightarrow{E}\right), \forall M \in O\left(n,\right) : \det \overrightarrow{f} = \pm 1, \det M = \pm 1.$$

Tout élément $\overrightarrow{f} \in OL^{+}\left(\overrightarrow{E}\right) = \left\{\overrightarrow{g} \in OL\left(\overrightarrow{E}\right) : \det \overrightarrow{g} = 1\right\}$ s'appelle rotation dans $\overrightarrow{E}$. L'ensemble des rotations de $\overrightarrow{E}$ est un sous-groupe de $OL\left(\overrightarrow{E}\right)$.

L'ensemble des matrices positives $O^{+}(n,\mathbb{R}) = \{M \in O(n,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$ est un sous-groupe de $O(n,\mathbb{R})$.

L'ensemble des applications isométriques négatives
$$OL^{-}\left(\overrightarrow{E}\right) = \left\{\overrightarrow{f} \in OL\left(\overrightarrow{E}\right) : \det \overrightarrow{f} = -1\right\}$$
ne constitue pas un sous-groupe de $OL\left(\overrightarrow{E}\right)$. De même, pour l'ensemble $O^{-}(n,\mathbb{R}) = \{M \in O(n,\mathbb{R}) : \det M = -1\}$.

Définition 3.12. Soit E un espace affine euclidien de dimension finie. Tout élément f de l'ensemble $OA^{+}(E) = \left\{f \in OA(E) : \det \overrightarrow{f} = 1\right\}$ (respectivement de l'ensemble $OA^{-}(E) = \left\{f \in OA(E) : \det \overrightarrow{f} = -1\right\}$) est dit "application isométrique positive" (respectivement "application isométrique négative") dans E.

Proposition 3.13. $OA^{+}(E) = \left\{f \in OA(E) : \det \overrightarrow{f} = 1\right\}$ *est un sous-groupe du groupe* $OA(E)$.

Démonstration. Puisque $OL^{+}\left(\overrightarrow{E}\right)$ est un sous-groupe de $OL\left(\overrightarrow{E}\right)$. □

Exercise 15. Si $f \in OA(E)$, on note p_f l'entier paraissant dans le théorème 0.34. Vérifier que $f \in OA^{+}(E)$ si et seulement si, p_f est paire.

Théorème 3.14. *Soit E un espace affine euclidien de dimension finie. Pour tout $f \in OA(E)$, il existe un seul vecteur $u \in \overrightarrow{E}$ et une seule application affine isométrique $g \in OA(E)$ tels que :*

1. $\overrightarrow{f}(u) = u$.
2. $\{A \in E : g(A) = A\} \neq \phi$.
3. $f = t_u \circ g = g \circ t_u$.

Démonstration. **-** Vérifions que
$$\overrightarrow{E} = \ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right).$$

Soit $u \in \ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) \bigcap \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$. Alors $\overrightarrow{f}(u) = u$ et $u = \overrightarrow{f}(v) - v$ avec $v \in \overrightarrow{E}$. Par suite
$$\begin{aligned} u \cdot u &= u \cdot \left(\overrightarrow{f}(v) - v\right) = u \cdot \overrightarrow{f}(v) - u \cdot v = \overrightarrow{f}(u) \cdot \overrightarrow{f}(v) - u \cdot v \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $u=0$.

Comme $\dim \overrightarrow{E} = \dim\ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) + \dim \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$, on a $\overrightarrow{E} = \ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$.

- On choisit un point arbitraire $O \in E$. D'après ce qui précède, on a $\overrightarrow{Of(O)} = u + \overrightarrow{f}(v) - v$ avec $\overrightarrow{f}(u) = u$ et $v \in \overrightarrow{E}$. On pose $g = t_{-u} \circ f$. Soit $A \in E$ telle que $\overrightarrow{OA} = -v$. On a

$$\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(A)} = u + \overrightarrow{f}(v) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right) = u.$$

Par conséquent $g(A) = t_{-u}(f(A)) = A$. D'autre part, $g \circ t_u \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(u)} = t_{\overrightarrow{f}(u)} = t_u$. Ainsi donc, $f = t_u \circ g = g \circ t_u$.

Il reste à montrer l'unicité de (u, g). Soit $(u', g') \in \overrightarrow{E} \times OA(E)$ et $A' \in E$ tels que $f = t_{u'} \circ g'$, $\overrightarrow{f}(u') = u'$ et $g'(A') = A'$. On a

$$\overrightarrow{A'f(A')} = \overrightarrow{g'(A')\, t_{u'}(g'(A'))} = u'$$

et

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(A')} + \overrightarrow{f(A')A'} = u - u' + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AA'}\right).$$

Par suite,

$$u' - u = \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{AA'}\right).$$

Ceci entraîne que $u' - u \in \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) \bigcap \ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) = \{0\}$. D'où $u' = u$ et $g = g'$.

Exercise 16. 1. Montrer que

$$\begin{aligned}
O(2,\mathbb{R}) &= \left\{\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1, \varepsilon = \pm 1\right\}, \\
O^+(2,\mathbb{R}) &= \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1\right\}, \\
O^-(2,\mathbb{R}) &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1\right\}.
\end{aligned}$$

2. Vérifier que les applications

$$\begin{aligned}
z &= a + ib \in S^1 \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in O^+(2,\mathbb{R}), \\
z &= a + ib \in S^1 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in O^-(2,\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

sont des homéomorphismes, et en déduire que $O^+(2,\mathbb{R})$ et $O^-(2,\mathbb{R})$ sont connexes par arc. Est-ce que l'ensemble $O(2,\mathbb{R})$ est connexe ?

3. Montrer que l'application

$$z = a + ib \in S^1 \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in O^+(2, \mathbb{R})$$

est un isomorphisme de groupes, et conclure que le groupe $O^+(2, \mathbb{R})$ est commutatif.

4. Soit $\overrightarrow{E}$ un plan euclidien. Montrer que, quel que soit $\overrightarrow{f} \in OL^+\left(\overrightarrow{E}\right)$, on a

$$\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}^{-1} = \begin{cases} \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} \in OL^+\left(\overrightarrow{E}\right), \\ \overrightarrow{f}^{-1}, \overrightarrow{g} \in OL^-\left(\overrightarrow{E}\right). \end{cases}$$

5. Vérifier que l'application

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O^+(2, \mathbb{R})$$

est un homomorphisme surjectif. Enduire que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \approx O^+(2, \mathbb{R}) \approx S^1$.

Si $\overrightarrow{f} \in OL^+\left(\overrightarrow{E}\right)$, les nombres réels $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $M_{\overrightarrow{f}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, s'appellent "angles" de la rotation $\overrightarrow{f}$. On dit que $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle d'angle θ.

6. Déterminer la nature géométrique d'un élément $\overrightarrow{f}$ de $OL^-\left(\overrightarrow{E}\right)$.

7. Etudier la nature géométrique d'un élément f de $OA(E)$, où E est un espace affine euclidien de dimension finie.

Exercise 17. Soit $\overrightarrow{E}$ un espace euclidien de dimension 3.

1. On considère une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de $\overrightarrow{E}$. Déterminer la matrice de la rotation d'axe $\{\lambda e_3 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ et d'angle θ, et la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\{\lambda e_1 + \mu e_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit $\overrightarrow{f} \in OL\left(\overrightarrow{E}\right)$. Montrer qu'il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de $\overrightarrow{E}$ telle que la matrice de $\overrightarrow{f}$ par rapport à (e_1, e_2, e_3) soit de la forme

$$M_{\overrightarrow{f}} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

avec $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$.

Etudier la nature géométrique de $\overrightarrow{f}$.

□

Références

[1] M. Audin, *Geometry*, Institut de recherche rathématique rvancée, Université Louis Pasteur et CNRS, France, 27th May 2002.

[2] S. Lang, G. Murrow, *Geometry*, 1983, 1988 Springer-Verlag New York, Inc.

[3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, 1969 John Wiley & Sons New York, Inc.