Université de Djelfa
Faculté des Sciences et Technologies
Département: Génie Electrique

Filière: Electrotechnique
Spécialité: Commande Electrique & Electrotechnique Industrielle

Module: *Asservissements échantillonnés et Régulation Numérique*

Cours 1 : Echantillonnage et reconstitution

Dr. Belgacem Said KHALDI

Niveau: Master 1, Semestre: S2 ***2023/2024*** ***Mise à jour : 15/11/2023***

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

Sommaire

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

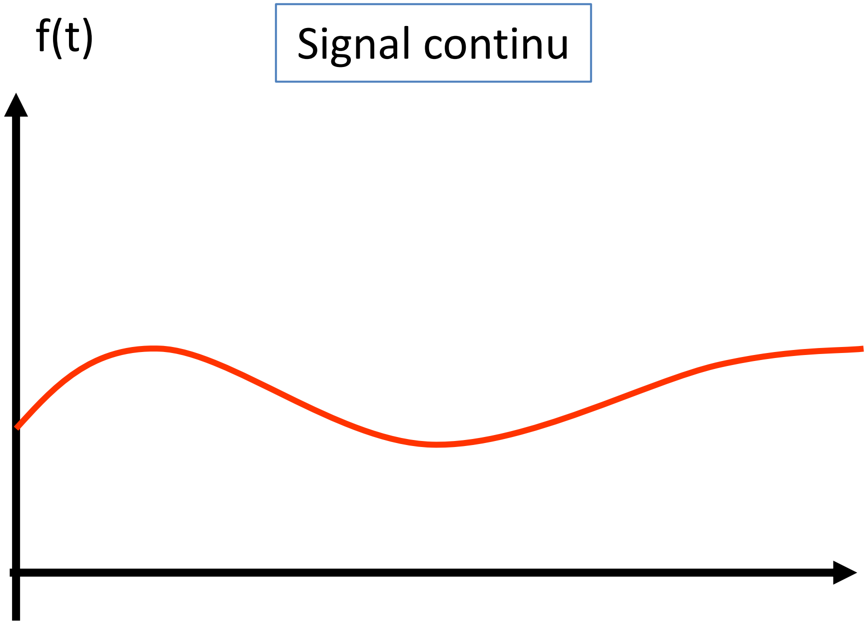
1- Echantillonnage des signaux

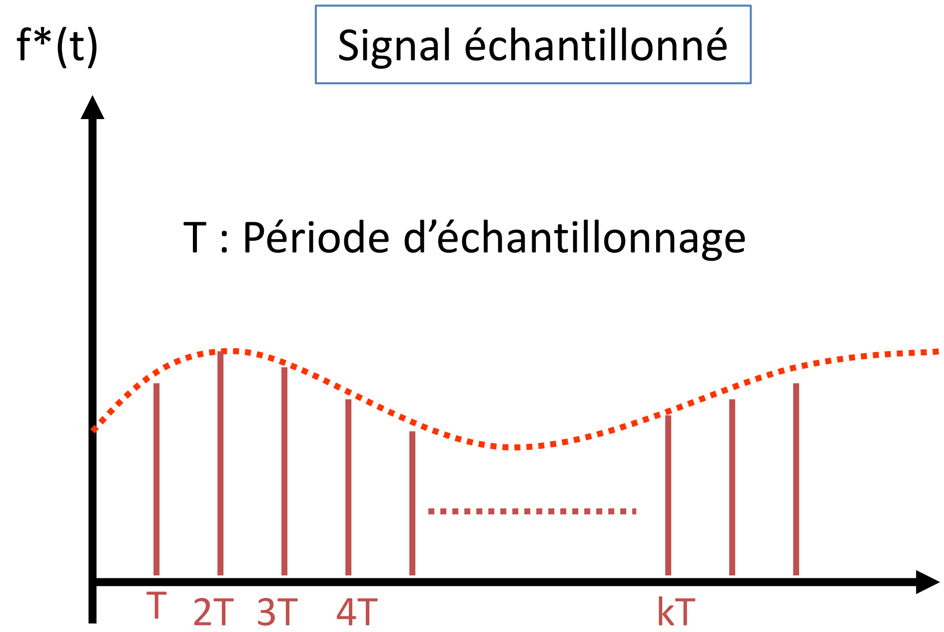
L'échantillonnage est l'opération qui permet le passage de l'analogique vers le discret.

C'est une opération de conversion d'un signal continu $f(t)$ en une série d'impulsions, dont les amplitudes sont déterminées par les valeurs du signal continu $f(t)$ aux instants d'échantillonnage.

Il s'agit de remplacer un signal continu dans le temps par un autre défini à certains instants seulement équidistants et suffisamment rapprochés pour qu'il contienne la même information , L'espace entre ces instants est appelé « Période d'échantillonnage T»

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution





L'échantillonnage produit donc, à partir d'un signal continu $f(t)$, la suite d'échantillons $\{f(kT)\}$:

$$\{f(kT)\} = \{f(0), f(T), f(2T), f(3T), \ldots\ldots, f(kT)\}$$

Ou

$$f^*(t) = \{f(kT)\} = \{f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_k\}$$

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

ou encore :

$$f(k) = \{f(kT)\} = \{f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k\}$$

Avec :

k : variable entière positive, $k \in \mathbb{N}$;

T : est la période d'échantillonnage (Par définition $T > 0$);

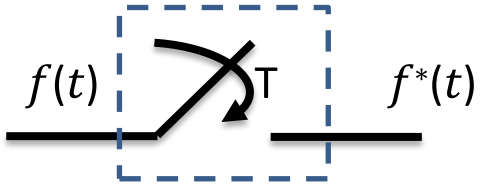
kT : sont les instants d'échantillonnage;

$f(kT)$ et f_k: sont les amplitudes du signal continu $f(t)$ aux instants d'échantillonnage kT ;

$f^*(t)$ ou $f(k)$: est le signal échantillonné du signal continu $f(t)$.

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

On appelle échantillonneur, l'organe effectuant le prélèvement des échantillons, il est représenté de la manière suivante :



Échantillonnage d'un signal continu $f(t)$

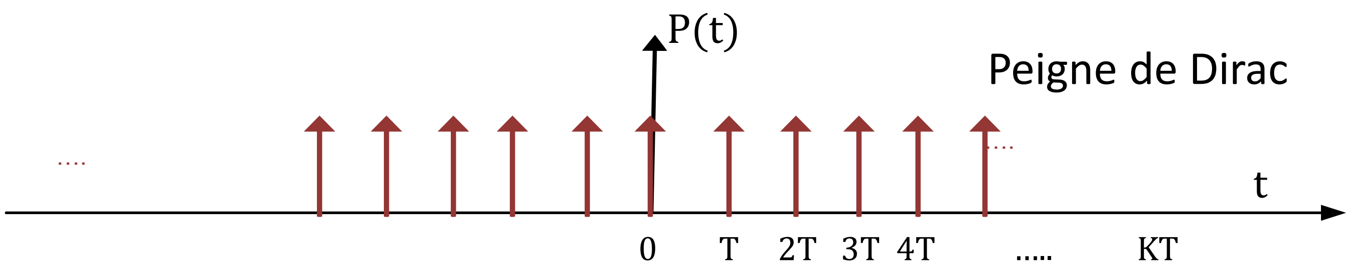
L'échantillonnage idéal effectue le prélèvement de manière instantanée.

L'opération de l'échantillonnage se traduit mathématiquement par la multiplication du signal continu $f(t)$ par le peigne de Dirac p(t) .

Pour t>0, on a : $f^*(t) = f(t)\,.\,P(t)$

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

Une peigne est une suite d'impulsions Dirac définie comme suit:



$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

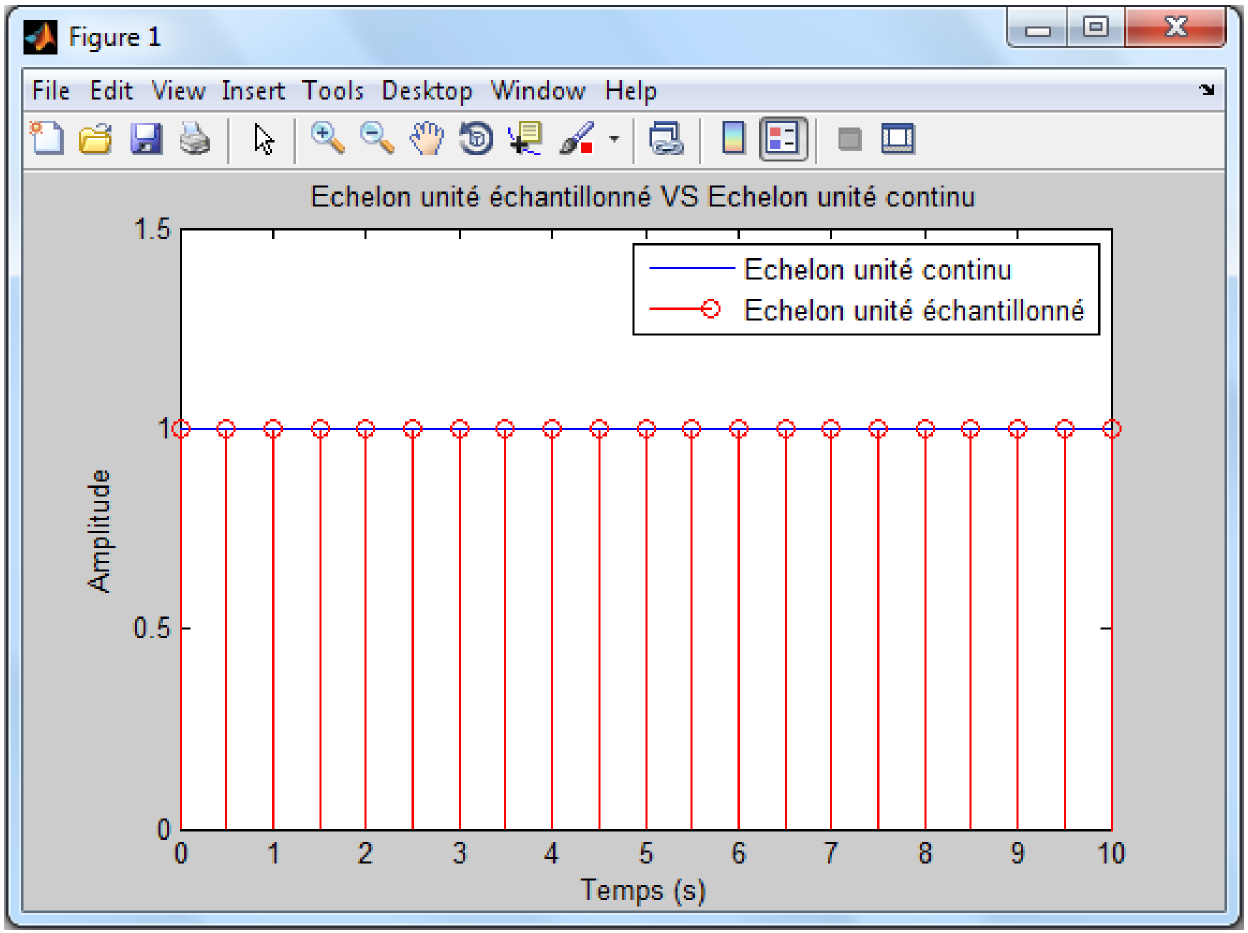
Dans ces conditions, pour t>0, on a

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \,.\, \delta(t - kT)$$

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

2- Exemples de signaux usuels échantillonnés

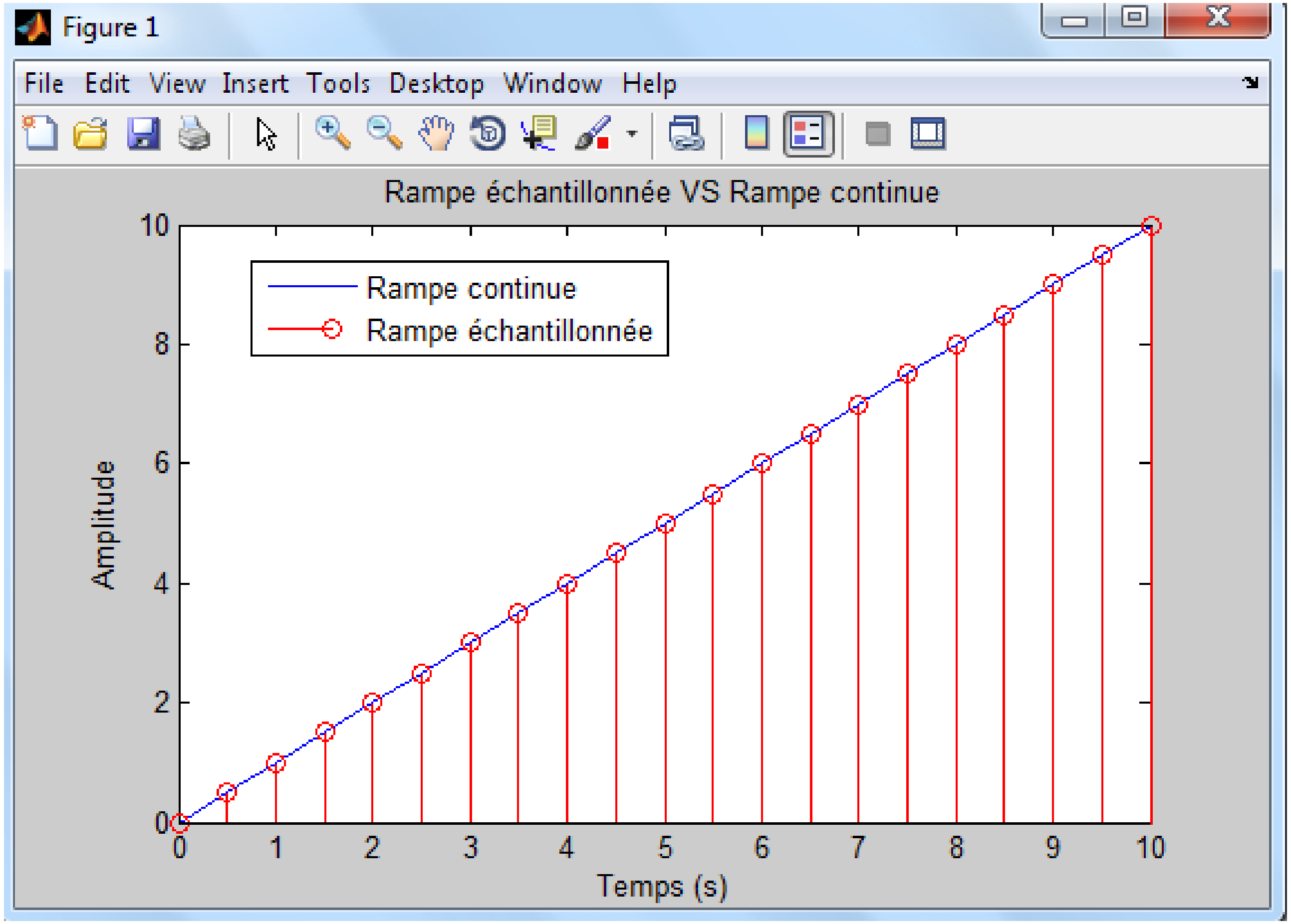
a. Échelon unité: $u^{*}(t) = \{1,1,1,\ldots,1\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT)$



Echelon unité échantillonné (T = 0.5 s) VS Echelon unité continu

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

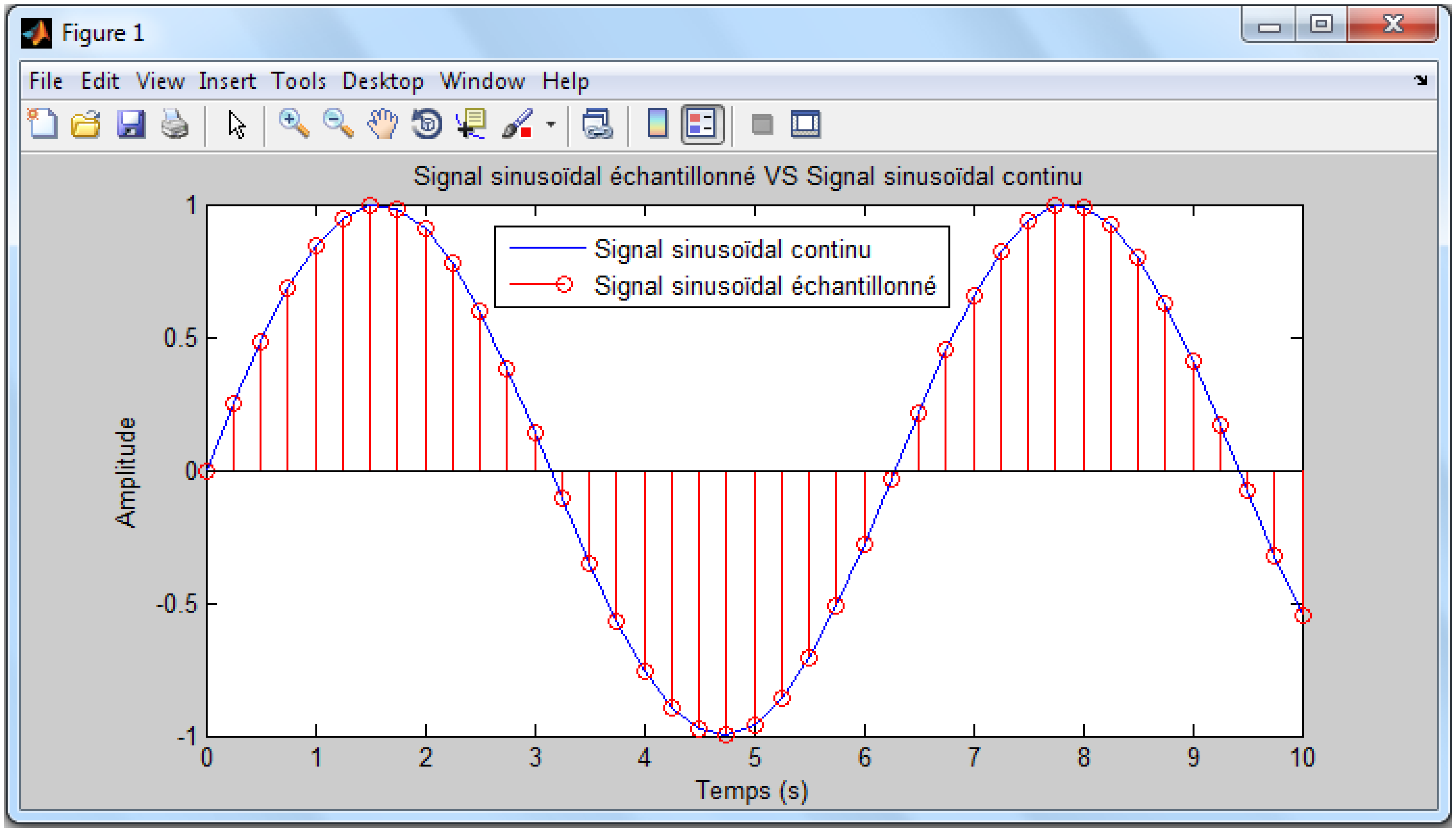
b. Rampe unité: $r^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} kT \,.\, \delta(t - kT)$



Rampe échantillonnée (T = 0.5 s) *VS Rampe continue*

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

c. Signal sinusoïdal: $f^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(kT) \,.\, \delta(t - kT)$



Signal sinusoïdal échantillonné (T = 0.25 s*). VS Signal sinusoïdal continu*

3- Transformée de Laplace d'un signal échantillonné

Soit $f^*(t)$ le signal échantillonné de $f(t)$.

La transformée de Laplace de $f^*(t)$ est donnée comme suit :

$$F^*(p) = \mathcal{L}\,[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\,.\,e^{-kTp}$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\;.\;\delta(t-kT) \xrightarrow{\mathcal{L}} F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\,.\,e^{-kTp}$$

4- Choix de la période d'échantillonnage

Pour trouver la période d'échantillonnage convenable T, on utilise le théorème de Shannon.
Ce théorème fournit les règles qui permettent de garantir un minimum de pertes d'informations dues à l'échantillonnage.

<u>Théorème de Shannon</u>

Pour **préserver**, lors de l'échantillonnage d'un signal e(t), **le contenu spectral** de ce signal, la fréquence d'échantillonnage, $f_e = 1/T$, doit être supérieure au double de f_{max}, la plus grande fréquence présente dans le spectre du signal continu :

$$f_e > 2\, f_{max}$$

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

f_{max} est donnée par la bande passante du processus, qui est directement liée à l'inertie du système, caractérisé par:

- La constante du temps τ si le système est du 1er ordre

- La pulsation propre ω_n si le système est du 2ème ordre

En pratique, on choisi : $$\boxed{5f_{max} \leq \frac{1}{T} \leq 25f_{max}}$$

➢ Système 1er ordre:

La fonction de transfert est : $$F(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Pulsation de coupure $\omega_c = 1/\tau$

Haute fréquence transmissible : $$f_{max} = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Condition sur T:

$$\boxed{0{,}25\tau \leq T \leq \tau}$$

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

➢ Système 2eme ordre:

La fonction de transfert est :
$$F(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}p + \frac{p^2}{{\omega_n}^2}}$$

Condition sur T: $\boxed{0{,}25/\omega_n \leq T \leq 1{,}25/\omega_n}$

Signal à échantillonner	*Période d'échantillonnage T recommandée*
Courant dans les entrainements électriques	$50 < T < 100\ (\mu s)$
Position en robotique	$0.2 < T < 1\ (ms)$
Position en machine-outil	$0.5 < T < 10\ (ms)$
Débit	$1 < T < 3\ (s)$
Niveau	$5 < T < 10\ (s)$
Pression	$1 < T < 5\ (s)$
Température	$10 < T < 45\ (s)$

Choix effectif de la période d'échantillonnage T

5- Reconstitution d'un signal continu

L'opération inverse de l'échantillonnage, c'est-à-dire la transformation d'une suite d'échantillons en un signal continu, est appelée reconstitution.

Cette étape est indispensable en commande numérique ;

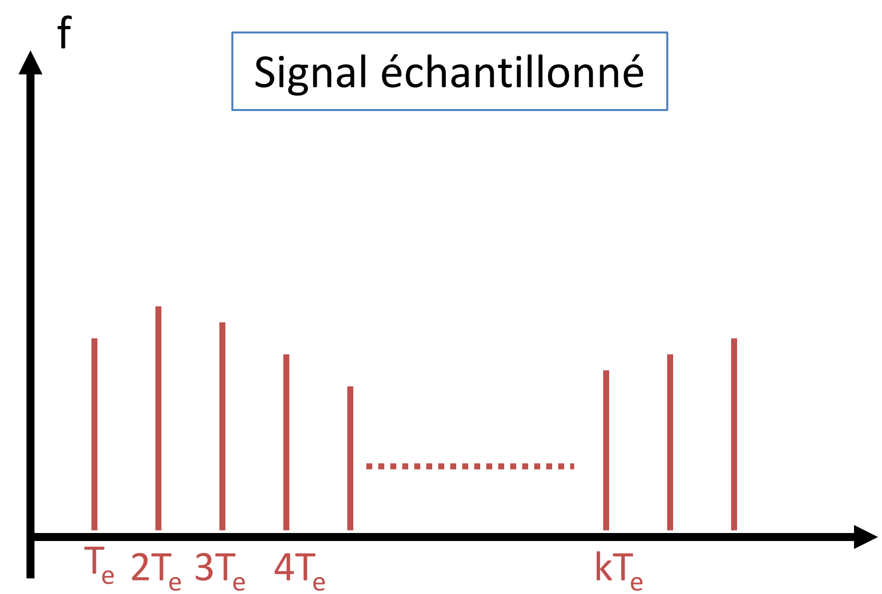
A partir des nombres générés par l'ordinateur (généralement un calculateur numérique), une grandeur de commande analogique doit être construite afin d'activer le système à commander.

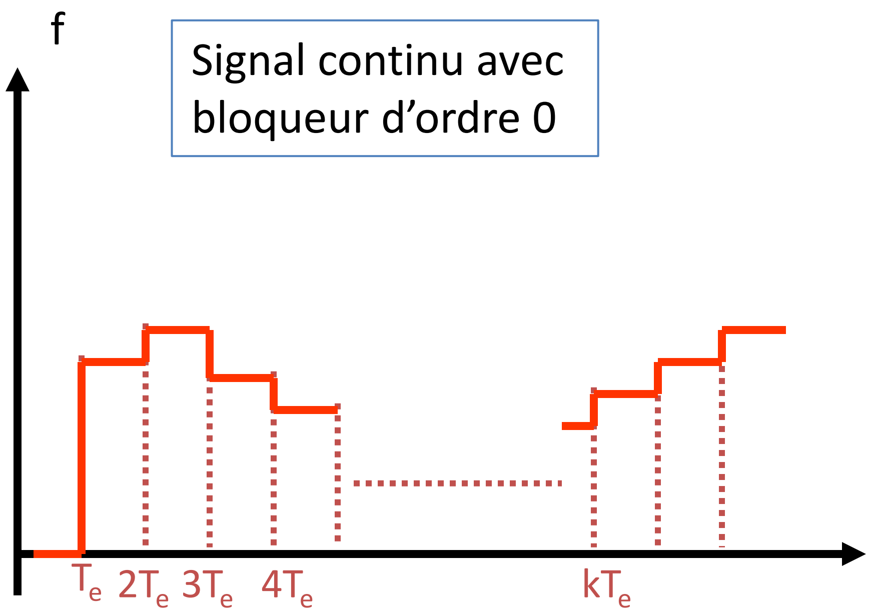
Cette opération est réalisée à l'aide de filtres ou de bloqueurs

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

5.1- Bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

Un bloqueur d'ordre zéro (***BOZ***) est caractérisé par le fait que sa sortie $s(t)$ entre les instants d'échantillonnage kT et $(k+1)T$ est constante et égale à $f(kT)$.





Le bloqueur permet de maintenir la valeur de l'échantillonnage jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

Le bloqueur ***BOZ est r***eprésenté par :

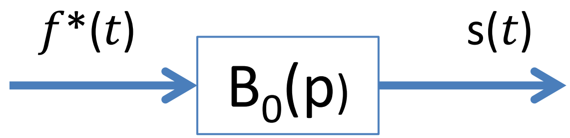
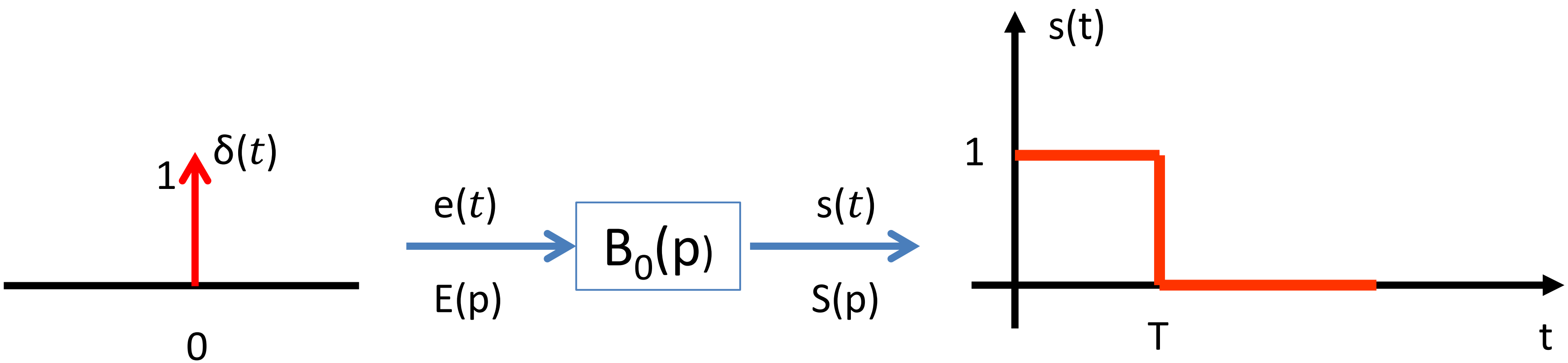


*Schéma fonctionnel d'un bloqueur d'ordre zéro (**BOZ**)*

Réponse impulsionnelle d'un BOZ



Réponse impulsionnelle d'un BOZ - avec T = 1(s)

Cours 1: Echantillonnage et reconstitution

Sa réponse impulsionnelle est :

$$s(t) = u(t) - u(t - T) \qquad \forall\ 0 \leq t \leq T$$

On a: e(t) : impulsion donc: $E(p) = \mathcal{L}\,[e(t)] = 1$

Et puisque $B_0(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$ Alors : $B_0(p) = S(p)$

La fonction de transfert continue du bloqueur ***BOZ*** s'écrit donc :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$