Université de Djelfa
Faculté des Sciences et Technologies
Département: Génie Electrique

Filière: Electrotechnique
Spécialité: Commande Electrique & Electrotechnique Industrielle

Module: ***Asservissements échantillonnés et Régulation Numérique***

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnées asservis

Dr. Belgacem Said KHALDI

Niveau: Master 1, Semestre: S2 ***2025/2026*** *Mise a jour le 11/05/2025*

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Sommaire

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

1- Introduction

Les systèmes échantillonnés (comme les systèmes à temps continu), doivent en général satisfaire à un cahier des charges qui impose, en boucle fermée, un certain nombre de performances :

- ✓ **Précision**
- ✓ **rapidité**
- ✓ **marge de stabilité**
- ✓ **limitation du dépassement**

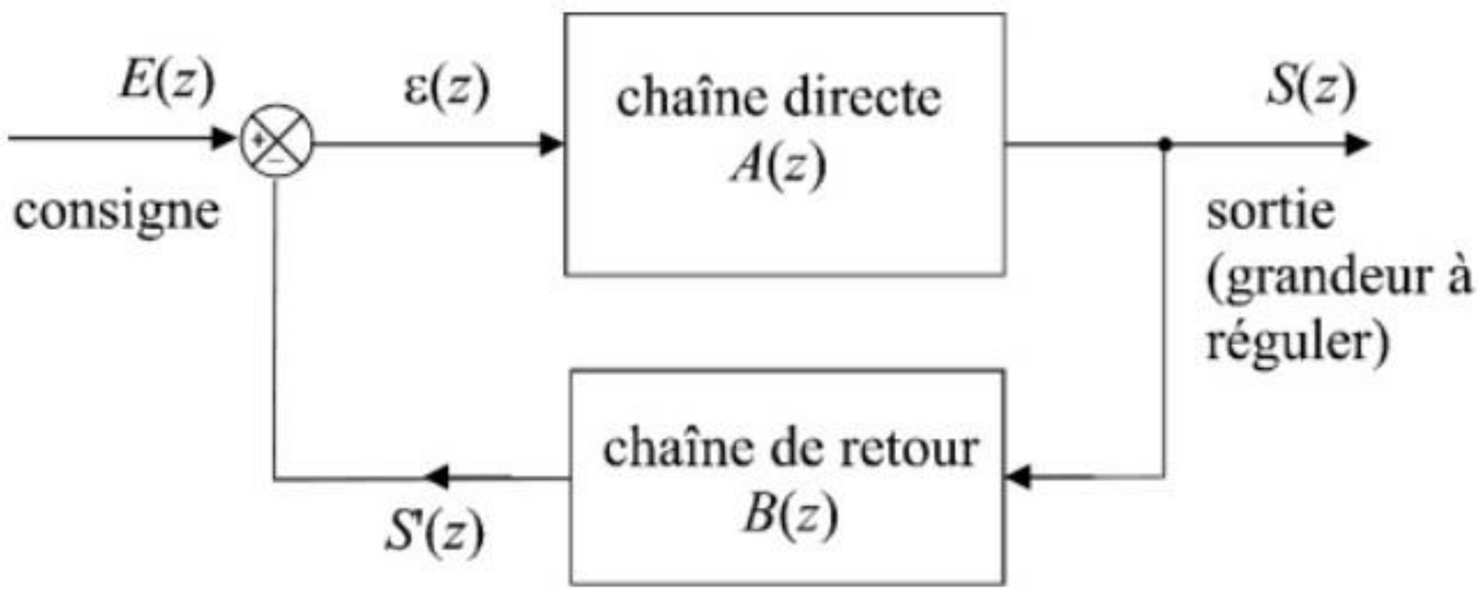


Schéma général d'un système échantillonné asservi.

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Rôle du correcteur

On introduit dans la chaîne directe un dispositif supplémentaire de fonction de transfert $C(z)$, appelé correcteur numérique:

Rôle: modifier les performances du système initial ,

- Transformer les fonctions de transfert en BO et en BF de manière à imposer à l'ensemble de fonctionner selon le cahier des charges voulu.

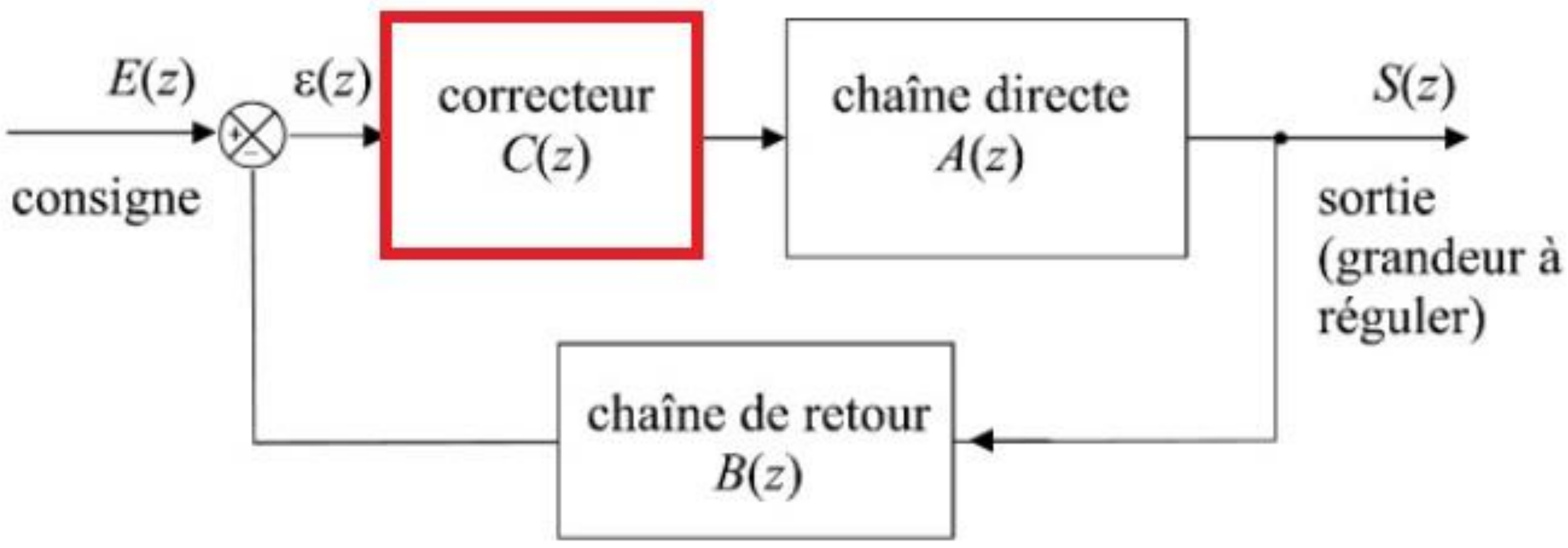
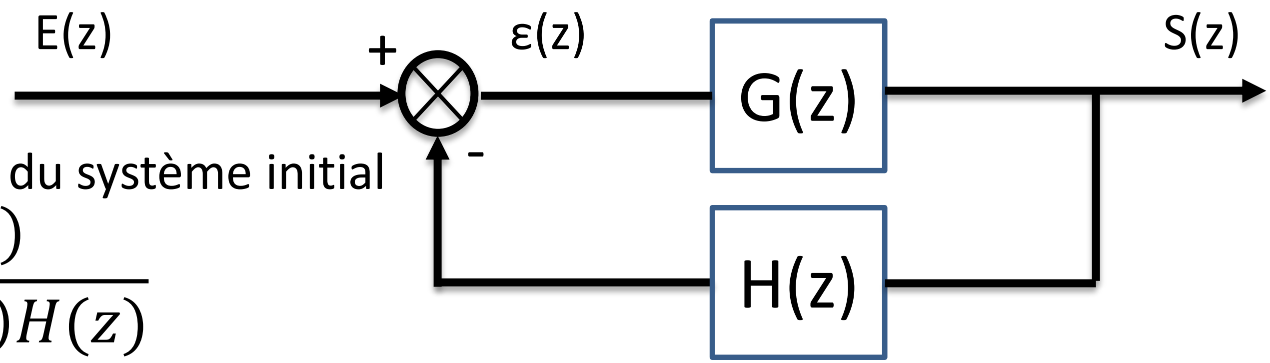


Schéma général d'un système échantillonné asservi et corrigé

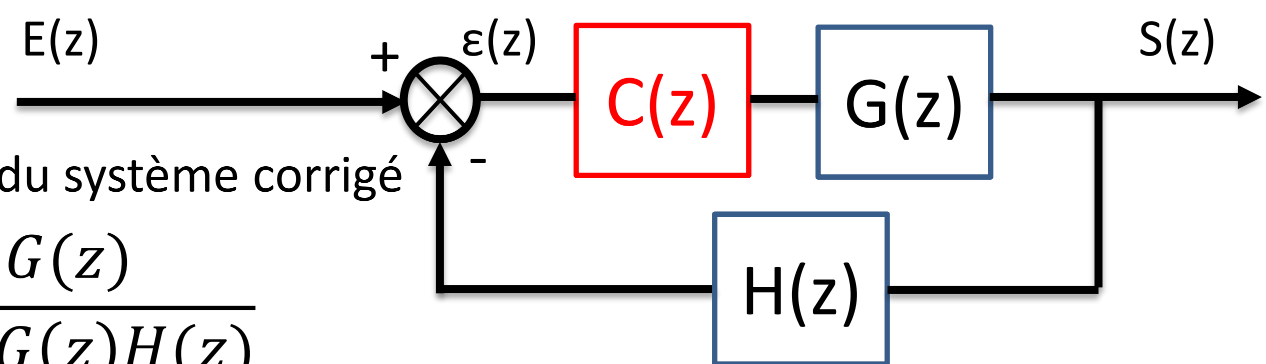
Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Fonctions de transfert en BF



fonctions de transfert en BF du système initial

$$F_{BF}(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$$



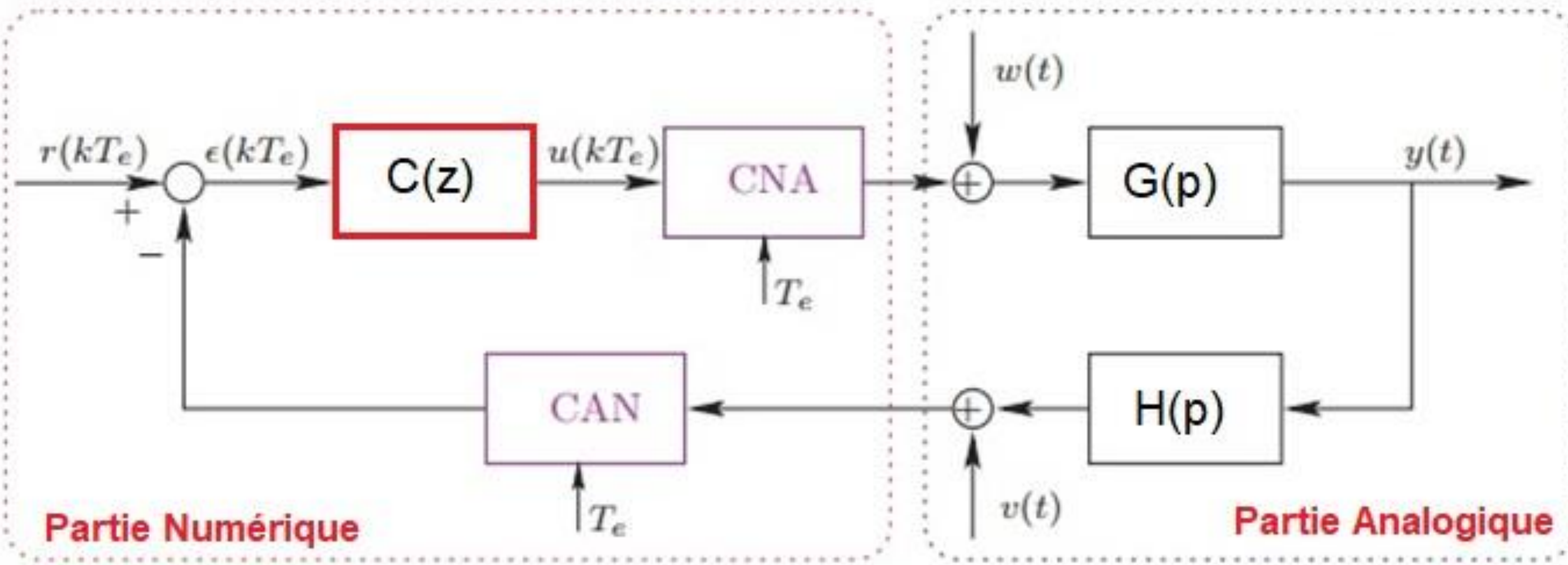
fonctions de transfert en BF du système corrigé

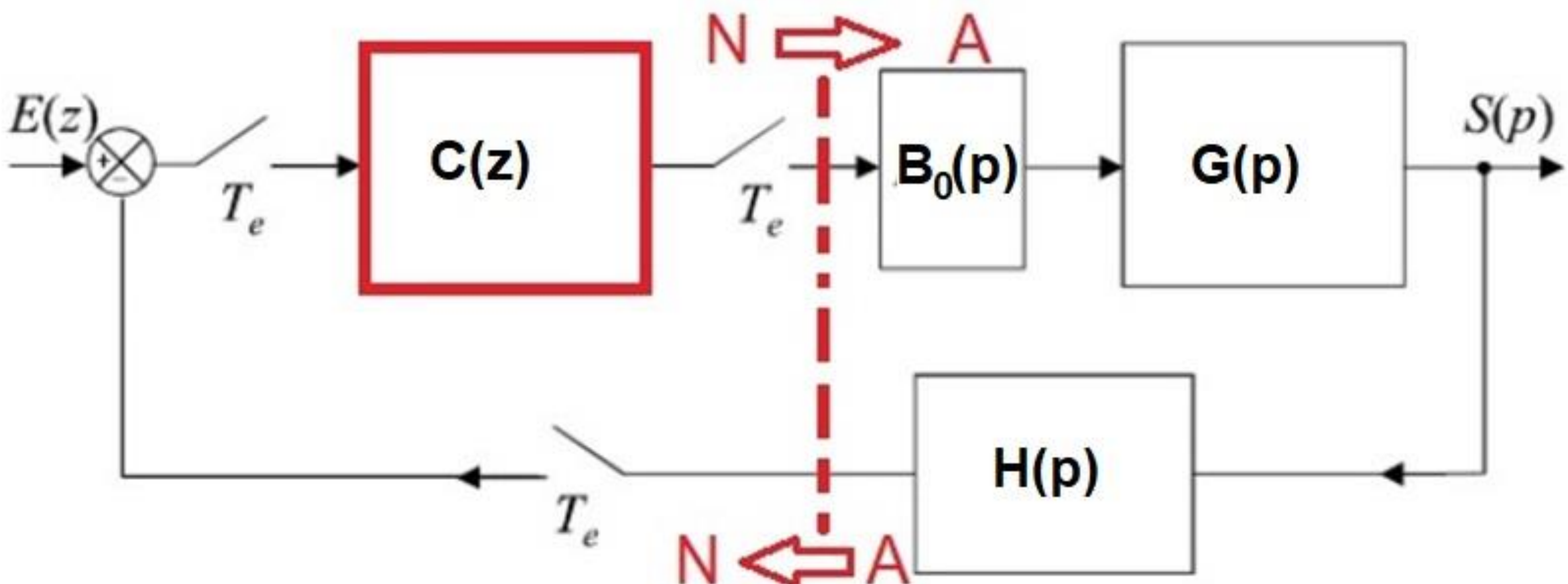
$$F_{C\ BF}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)}$$

La correction des systèmes échantillonnés consiste à choisir la bonne fonction de transfert $C(z)$ de manière à régler chaque performance sur sa valeur requise, sans perturber le fonctionnement du système.

- Ces corrections sont en général assurées par un calculateur.

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis





Asservissement continu commandé et corrigé numériquement.

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Correcteur PID

L'algorithme PID se caractérise par trois actions de base:

- Action proportionnelle (P), Action intégrale (I) , Action dérivée (D)

Sous la forme continue, ce correcteur s'écrit :

$$u(t) = k_c e(t) + \frac{k_I}{T_i}\int_0^t e(t)dt + k_c T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Principe d'équivalence

Action proportionnelle (P)

$$C(p) = K \longleftrightarrow C(z) = K$$

Action intégrale (I)

$$C(p) = \frac{1}{p} \longleftrightarrow C(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Action dérivée (D)

$$C(p) = p \longleftrightarrow C(z) = 1 - z^{-1}$$

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Amélioration de la précision par action intégrale (I)

La présence, dans la fonction de transfert en BO, d'un intégrateur (d'un pôle égal à 1) assure : la nullité de l'erreur de position, donc une précision statique parfaite.

S'il y a au moins deux intégrateurs dans la chaîne directe, l'erreur de vitesse est nulle, donc la précision dynamique parfaite est assurée.

Donc, pour améliorer la précision en BF d'un système à temps discret, on peut choisir un correcteur de fonction de transfert égale à :

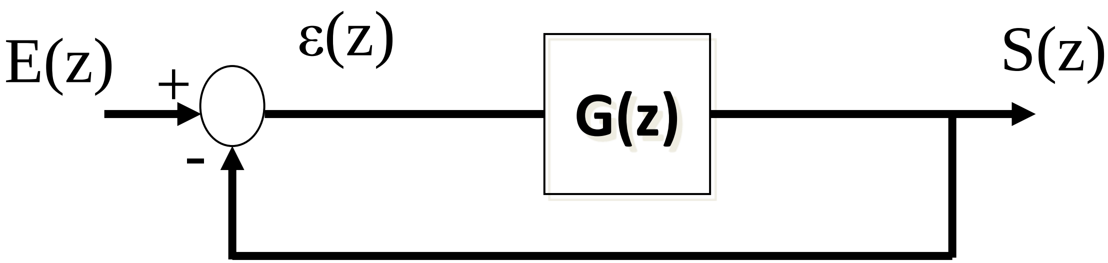
$$C(z) = \frac{K}{(1-z^{-1})^n}$$

n=1 : erreur de position nulle
n=2 : erreur de vitesse nulle

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Conséquence de l'introduction d'un intégrateur sur les autres performances

Exemple



Avec:

$$G(z) = \frac{2z}{z - 0{,}5}$$

En B.F $\quad G_{BF} = \dfrac{S(z)}{E(z)} = \dfrac{2z}{3z - 0{,}5}$

$$|z| = |P_1| = 0{,}17 < 1$$

Système stable

L'équation de récurrence : $\quad s_k = 0{,}17 s_{k-1} + 0{,}67 e_k$

e(k) : échelon unitaire

k	0	1	2	3	4	5	6
e(k)	1	1	1	1	1	1	1
s(k)	0,667	0,777	0,796	0,799	0,8	0,8	0,8

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

L'erreur de position

$$\epsilon_p = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{1+G(z)}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{1+\frac{2z}{z-0{,}5}}\right) = 0{,}2 = 20\%$$

Introduisons un intégrateur dans la chaîne directe.

$$G(z) = \frac{K}{1-z^{-1}} \cdot \frac{2z}{z-0{,}5} = \frac{2z^2}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

Avec K=1

En B.F $$G_{BF}(z) = \frac{2z^2}{3z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}$$

$$|z| = |P_1| = |P_2| = 0{,}41 < 1$$

Système stable

La marge de stabilité est diminuée par l'ajout du correcteur (elle reste néanmoins très confortable)

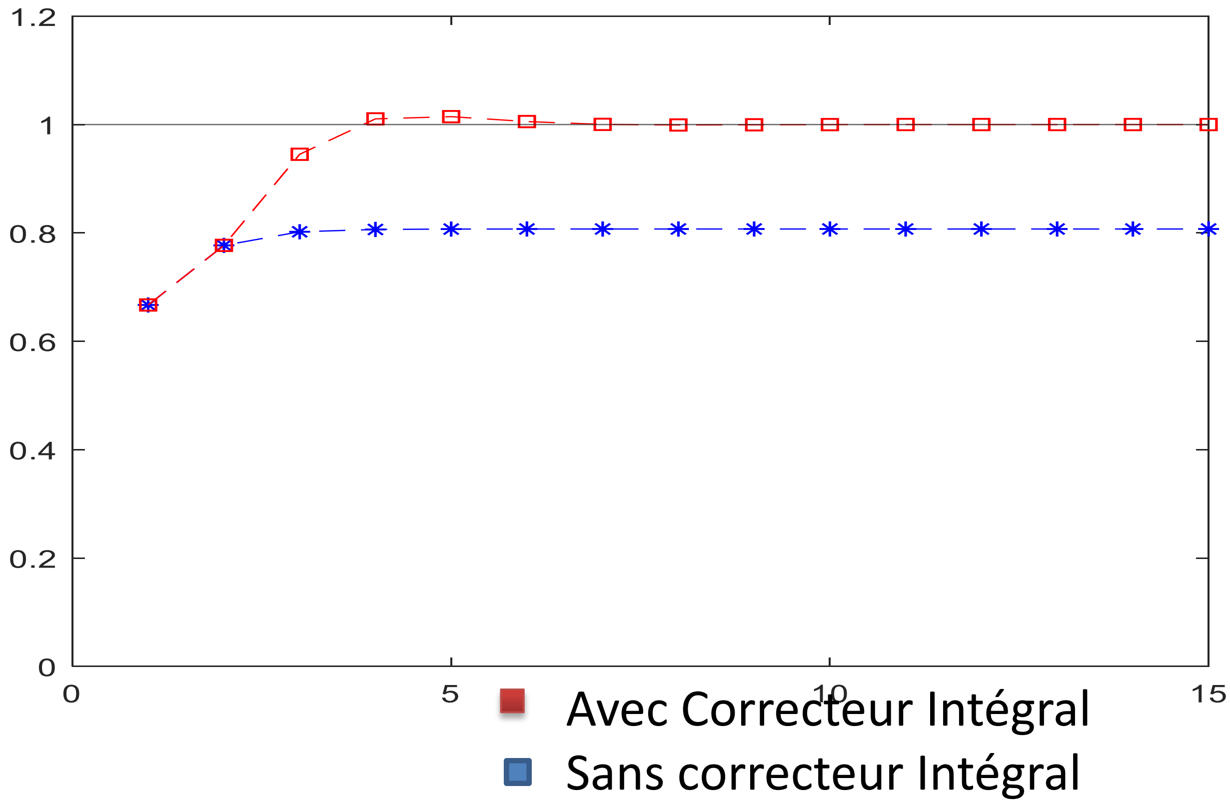
Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

L'équation de récurrence : $s_k = 0{,}5s_{k-1} - 0{,}17s_{k-2} + 0{,}67e_k$

k	0	1	2	3	4	5	6
e(k)	1	1	1	1	1	1	1
s(k)	0,667	1,000	1,056	1,028	1,005	0,998	0,998

On note :

- La présence d'un faible dépassement (environ 6 %)
- une plus grande rapidité



Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Compensation de la perte de stabilité par placement des pôles

Avec l'intégrateur, on ajoute un gain K dans la chaîne directe

$$G(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{2z}{z - 0{,}5} = \frac{2\,K\,z^2}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

Avec $K \neq 1$

En B.F

$$G_{BF}(z) = \frac{2\,K\,z^2}{(1+2K)\,z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}$$

❖ Pour augmenter la marge de stabilité, on doit chercher à réduire le module des pôles

Les pôles :

$$p_{1/2} = \frac{1{,}5 \pm j\sqrt{4K - 0{,}25}}{2(1+2K)}$$

Soit:

$$|p_1| = |p_2| = \frac{\sqrt{(1{,}5)^2 + 4K - 0{,}25}}{2(1+2K)} = \frac{1}{\sqrt{2(1+2K)}}$$

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

On choisi une valeur de K qui correspond à une valeur souhaitée pour le module de chaque pôle :

Par exemple $\quad |P_1| = |P_2| = 0{,}25 \quad \text{pour} \quad \mathrm{K} = 3{,}5$

On a alors : $\quad G_{BF}(z) = \dfrac{7}{8 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}$

L'équation de récurrence est: $\quad s_k = 0{,}1875 s_{k-1} - 0{,}0625 s_{k-2} + 0{,}875 e_k$

k	0	1	2	3	4	5	6
e(k)	1	1	1	1	1	1	1
s(k)	0,875	1,039	1,015	1,000	0,999	1,000	1,000

- Un meilleur amortissement, donc une augmentation de la marge de stabilité

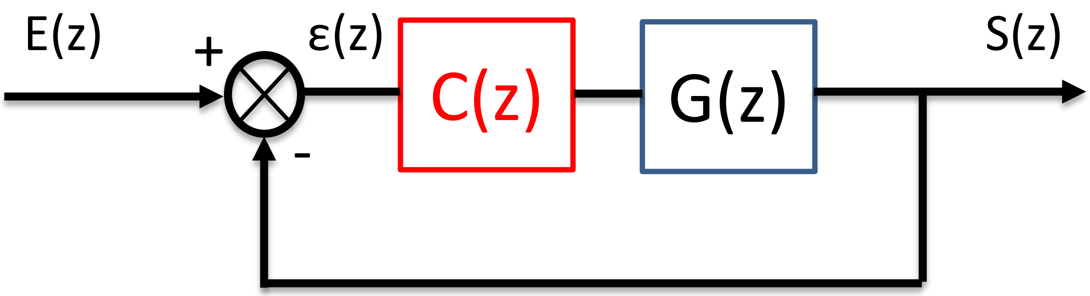
Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Action dérivée (D)

Un correcteur numérique à action dérivée possède une fonction de transfert $C(z)$ égale à :

$$C(z) = K\,(1 - z^{-1}) \quad avec \quad K > 0$$

Exemple



Avec:

$$G(z) = \frac{1}{z - 0{,}1}$$

La fonction de transfert en BF du système non corrigé est:

$$G_{BF} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{1}{z+0{,}9}$$

Le pôle P_1=-0,9 a une valeur proche de la limite d'instabilité

- ✓ le système est donc stable en BF , on peut le corrigé pour disposer d'une marge de sécurité plus confortable

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

L'équation de récurrence est: $s_k = -0{,}9s_{k-1} + e_{k-1}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
e(k)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s(k)	0	1	0,1	0,91	0,181	0,837	0,247	0,778	0,3

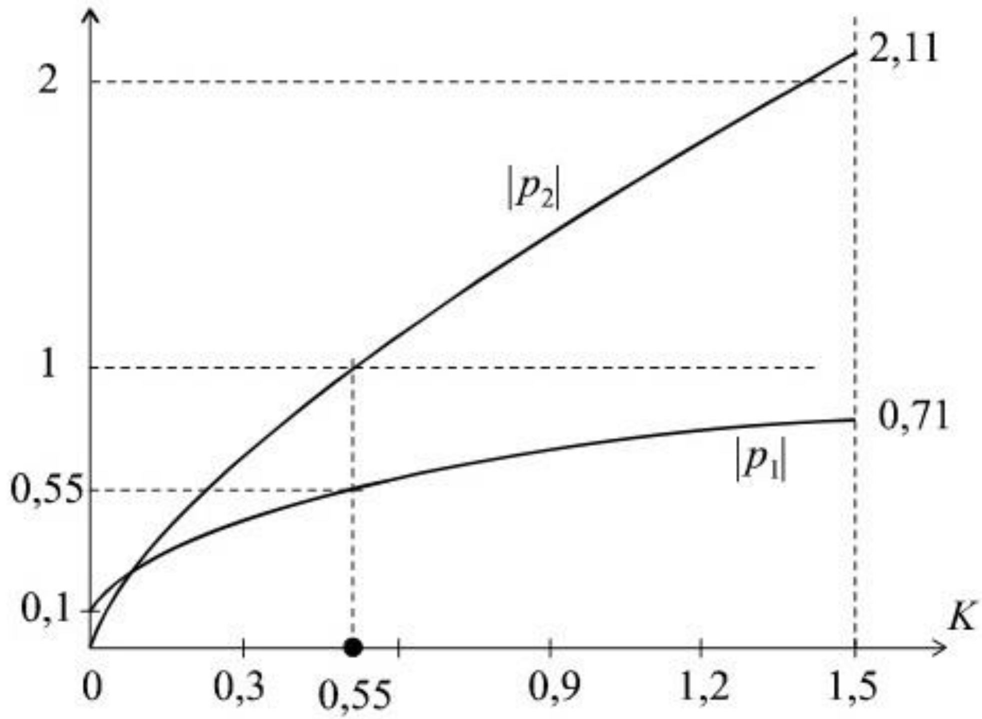
le système est stable, mais peu stable si l'on en croit le régime oscillatoire très peu amorti. De plus, il est très peu précis.

Avec le dérivateur, on a en Boucle ouverte :

$$G(z) = K\,(1 - z^{-1}).\frac{1}{z - 0{,}1} = \frac{K(z-1)}{z(z-0{,}1)}$$

En B.F $$G_{BF}(z) = \frac{K(z-1)}{z^2 + z(K-0{,}1) - K}$$

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis



Variations des modules des pôles en fonction du gain *K*

$$le\ systeme\ est\ stable\ pour \quad 0 < \mathrm{K} < 0{,}55$$

Pour avoir une marge de stabilité plus grande on choisi la valeur de K la plus petite possible : $|z|$ <0,9   pour K<0,45

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Choisissons par exemple K = 0,4 puis calculons et traçons la suite d'échantillons en sortie

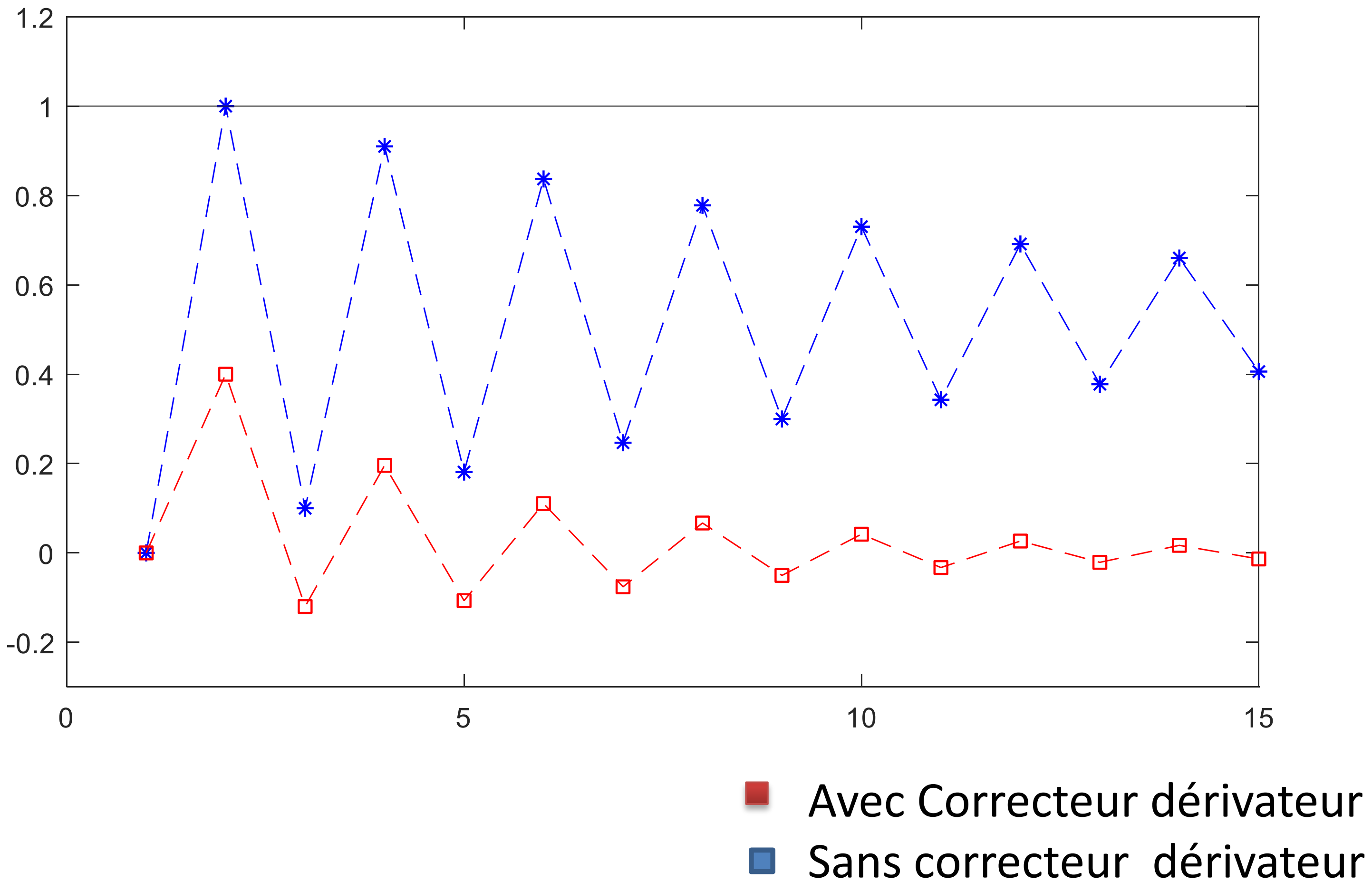
L'équation de récurrence est: $s_k = -0{,}3s_{k-1} + 0{,}4s_{k-2} + 0{,}4e_{k-1} - 0{,}4e_{k-2}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
e(k)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s(k)	0	0,4	-0,12	0,196	-0,107	0,11	-0,076	0,067	-0,05

Le système est effectivement plus stable puisqu'il converge vers une valeur finie beaucoup plus vite, ce qui est conforme au calcul des nouveaux pôles.

$$|P_1| = 0{,}5 \quad , \quad |P_2| = 0{,}8 \qquad \text{pour} \quad \mathrm{K} = 4$$

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis



Toutefois, ce type de correction est inacceptable puisque l'erreur de position ε_p atteint à présent 100 %.

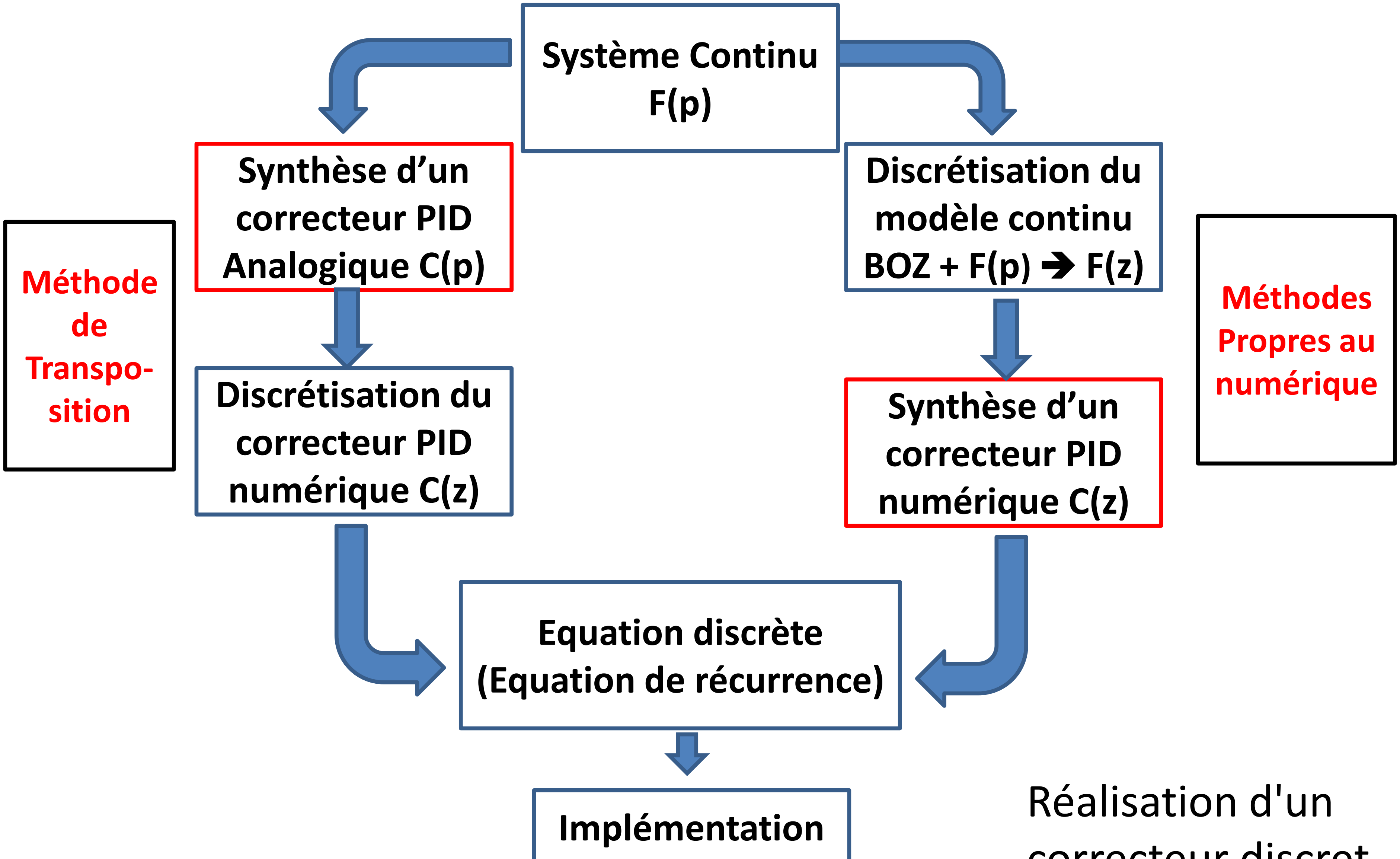
Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Les systèmes que l'on cherche à commander sont généralement continus. La réalisation d'un correcteur par un calculateur implique que l'on génère une équation de commande discrète (une équation récurrente).

L'obtention de cette équation de commande peut se faire de deux manières :

- ✓ Synthétiser un correcteur continu , et discrétiser ensuite ce correcteur.
- ✓ Obtenir la représentation discrète du système continu associé à son interface numérique (convertisseurs AN et NA), puis synthétiser directement le correcteur discret

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis



Réalisation d'un correcteur discret

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

La synthèse de correcteurs PID numériques par transposition de correcteurs PID analogiques est une approche couramment utilisée dans le domaine industriel pour deux raisons majeures :

- les méthodes de synthèse de correcteurs PID analogique sont généralement bien maîtrisées

- les spécifications sont plus facilement interprétables avec des modèles continus qu'avec des modèles échantillonnés

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Régulateur PID

L'algorithme PID se caractérise par les trois actions de base, Sous la forme continue, ce correcteur s'écrit :

$$u(t) = k_c e(t) + \frac{k_I}{T_i}\int_0^t e(t)dt + k_c T_d \frac{de(t)}{dt}$$

L'action proportionnelle est essentielle au fonctionnement du PID. Elle permet essentiellement de donner de la puissance au signal de commande en agissant sur le coefficient K_c.

Plus K_c est grand, plus le système converge vite vers sa valeur finale. Mais en contrepartie, pour des valeurs de $\mathrm{K_c}$ trop grandes, le système oscille et génère des dépassements.

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

- Le problème majeur avec des proportionnelles est que le signal de sortie n'atteint jamais la consigne désirée.

- L'érreur statique, c'est la différence entre le signal généré et le signal désiré en régime permanent. Pour compenser cette erreur statique, on rajoute le terme intégral.

- Le correcteur intégral sert principalement à supprimer l'erreur statique. Apres élimination de ϵ_s avec un correcteur PI, le système oscille encore et les dépassements sont plus grands. Le terme dérivé est ajouté pour permettre de diminuer considérablement ces dépassements.

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

Version numérique du PID par les méthodes de transposition usuelles

PID idéal

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

PID réel (avec dérivée filtrée)

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_d s/N}\right) (N \geq 5)$$

Approximation Euler retardée

$$s = \frac{z-1}{T_e z} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

$$C(z) = K_p\left[1 + \frac{1}{T_i}\frac{T_e z}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + \frac{NT_e}{T_d}\right)z - 1}\right]$$

Approximation Euler avancée

$$s = \frac{z-1}{T_e} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e z^{-1}}$$

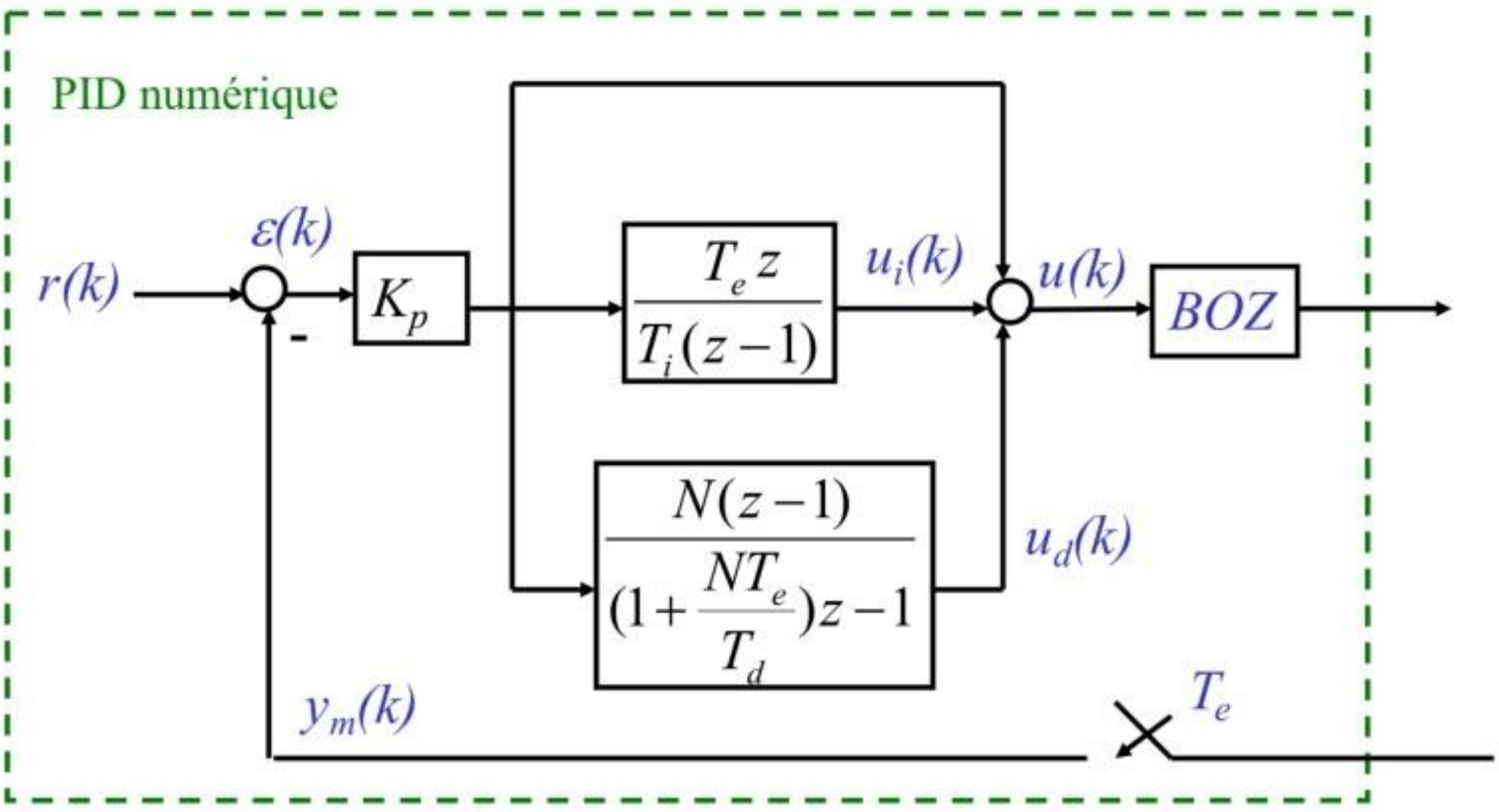
$$C(z) = K_p\left[1 + \frac{1}{T_i}\frac{T_e}{z-1} + \frac{N(z-1)}{z - \left(1 - \frac{NT_e}{T_d}\right)}\right]$$

Approximation de Tustin

$$S = \frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T_e}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$C(z) = K_p\left[1 + \frac{T_e}{2T_i}\frac{z+1}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + \frac{NT_e}{2T_d}\right)z - \left(1 - \frac{NT_e}{2T_d}\right)}\right]$$

Schéma d'implantation de la forme standard d'un PID numérique (approximation retardée)



Approximation retardée : formules plus simples souvent utilisées en pratique pour cette raison

Régulateur PID

- **Action P** : augmente la bande passante, donc la rapidité ; améliore la précision et dégrade la stabilité.

- **Action I** : ralentit le système ; améliore la précision en augmentant la classe du système et peut dégrader la stabilité. De plus, peu robuste aux perturbations basses-fréquences sur le signal de consigne.

- **Action D** : augmente la bande passante du système donc sa rapidité, permet d'améliorer la stabilité mais amplifie les bruits de mesure hautes fréquences.

Cours 5 : Correction des systèmes échantillonnés asservis

De façon qualitative :

– Pour rendre le système *stable*, il faut rassembler tous les pôles du système dans le cercle unité et pour garantir une meilleure *stabilité*, il faut éloigner le plus possible les pôles de ce cercle en les rapprochant de l'origine.
– Pour rendre le système plus *précis*, il faut augmenter le gain statique, voire ajouter des intégrateurs pour augmenter la classe du système.
– Pour améliorer la rapidité du système, il faut augmenter la bande passante de celui-ci, en augmentant la valeur de la fréquence de coupure.