

Université de Djelfa  
Faculté des Sciences et Technologies  
Département d'Electronique et communications



*Filière: Electronique*

*Spécialité: Electronique des systèmes embarqués*

**Module: *Systemes Asservis Numériques***

**Cours 3 : *Systemes échantillonnés (discrets)***

**Dr. Belgacem Said KHALDI**

*Niveau: Master 1, Semestre: S1*

*2024/2025*

*Mise à jour : 14/11/2024*

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## Sommaire

### Représentation des systèmes échantillonnés

#### 1- Fonction de transfert Echantillonnée

1-1 Fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en  $z$

1-2 Fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en  $z^{-1}$

1-3 Composition des fonctions de transfert en  $z$

2- Discrétisation des systèmes LTI monovariables continus

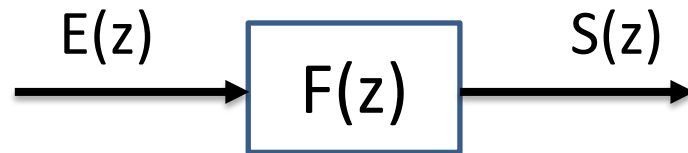
3- Equations aux différences (équations récurrentes)

Exemples

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## Représentation des systemes échantillonnés

Les systemes linéaires invariants dans le temps (Linear Time Invariant LTI) discrets monovariables peuvent être représentés par le diagramme suivant:



Systemes linéaires:  $a \cdot e_1(t) + b \cdot e_2(t)$   $\rightarrow$  Syst Linéaire  $\rightarrow a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)$

Systemes Invariants: Si  $e_1(t) \rightarrow$  Syst Invariant  $\rightarrow s_1(t)$

$\rightarrow e_1(t - \tau) \rightarrow$  Syst Invariant  $\rightarrow s_1(t - \tau)$

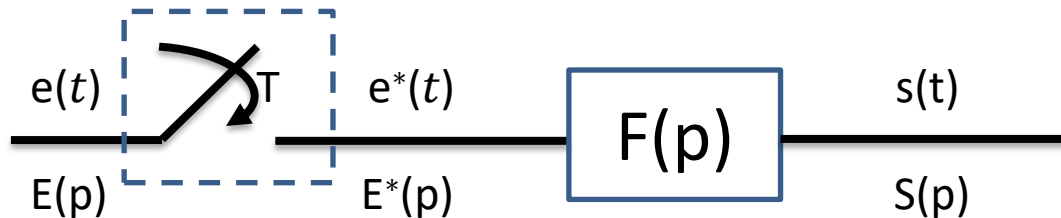
Représentation des systemes LTI échantillonnés par:

- Les fonctions de transfert discrètes ;
- Les équations aux différences (équations récurrentes) ;

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## 1- Fonction de transfert Echantillonnée

Soit le système linéaire et continu, de fonction de transfert  $F(p)$ , attaqué par un échantillonneur :



La transformée de Laplace de la sortie du système continu est :

$$S(p) = F(p) \cdot E^*(p)$$

D'après la relation :

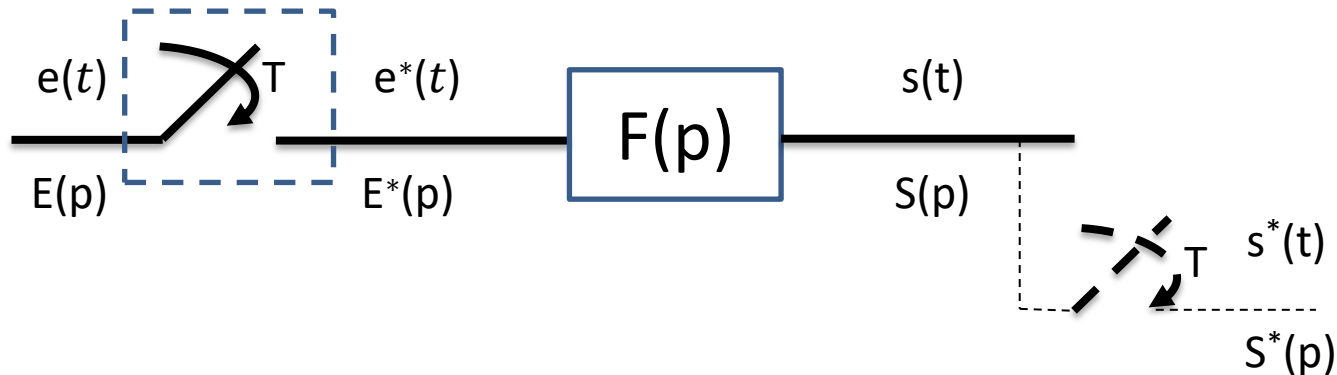
$$E^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot e^{-kTp}$$

Donc:

$$S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot F(p) \cdot e^{-kTp}$$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

Soit l'échantillonneur Fictif:



On a par définition:

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

$$E^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot e^{-kTp}$$

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT) \cdot e^{-kTp}$$

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot e^{-kTp}$$

## Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

La sortie de l'échantillonneur fictif est donnée par:

$$S^*(p) = F^*(p) \cdot E^*(p)$$

Effectuons le changement de variable  $z = e^{Tp}$ , il vient:

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot z^{-k} = F(z)$$

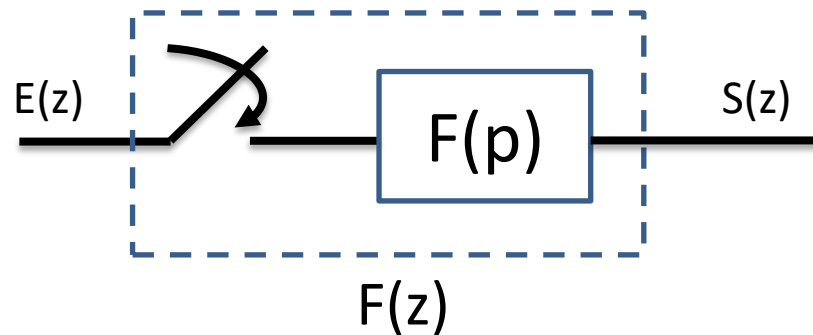
$$E^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot z^{-k} = E(z)$$

On a alors:

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

$F(z)$  est la fonction de transfert échantillonnée du système linéaire continu de fonction de transfert  $F(p)$ :



La transformation en  $Z$  est l'outil privilégié pour traiter les fonction de transfert échantillonnée, donc les signaux et les systèmes décrits en temps discret.

Alors que la transformation de Laplace est un moyen de traiter les signaux et les systèmes décrits en temps continus

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## 1-1 Fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en $z$

Un système discret peut être représenté par la FT en  $z$  suivante :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

- ❖ Les racines du numérateur  $N(z)$  sont les zéros du système discret.
- ❖ Les racines du dénominateur  $D(z)$  sont les pôles du système discret.
- ❖ Le polynôme  $D(z)$  est appelé polynôme caractéristique du système
- ❖ Le degré de  $D(z)$  est égal à l'ordre du système ( $n$ )

La forme pôles, zéros, gain:

$$F(z) = \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{a_n (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

Avec:  $p_{i=1,2,\dots,n}$ : pôles     $z_{j=1,2,\dots,m}$ : zéros     $k = \frac{b_m}{a_n}$ : gain

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## 1-2 Fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en $z^{-1}$

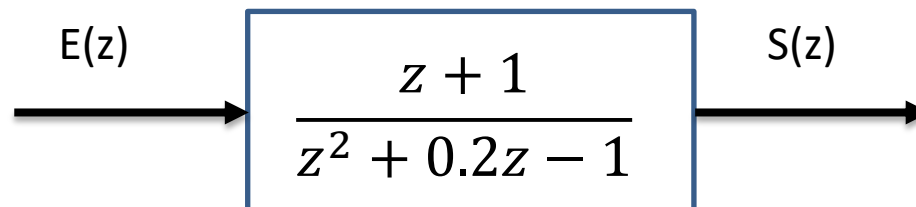
Un système discret peut être aussi représenté par une fonction de transfert polynomiale en  $z^{-1}$ .

En multipliant dénominateur et numérateur de la fonction de transfert, par le terme  $z^{-n}$ , on aura des puissances négatives comme suit :

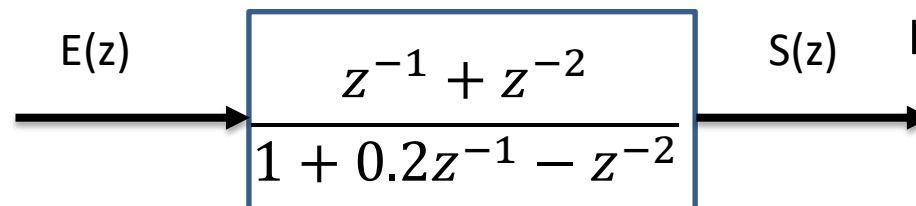
$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = z^{m-n} \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_1 z^{-m+1} + b_0 z^{-m}}{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

### Exemple

forme en  $z$



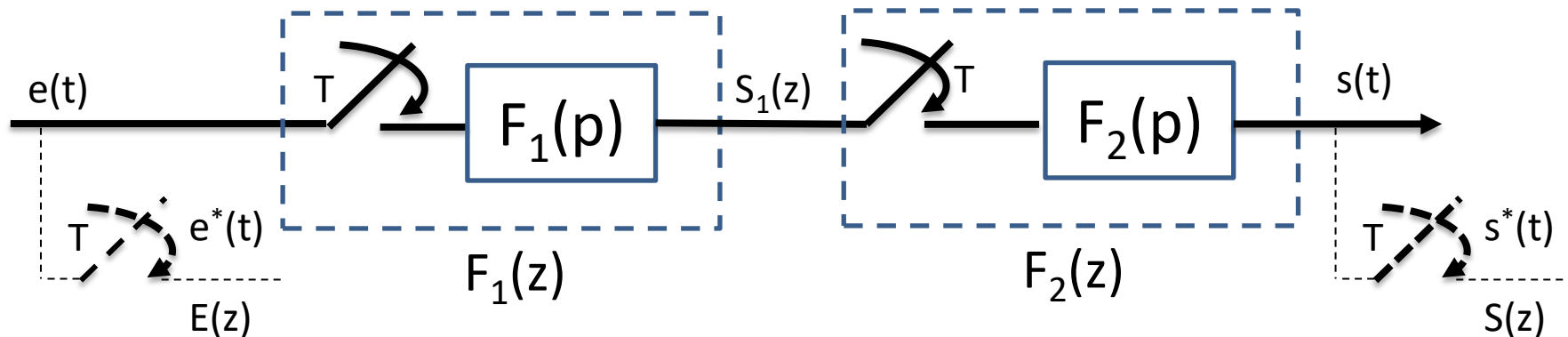
forme en  $z^{-1}$



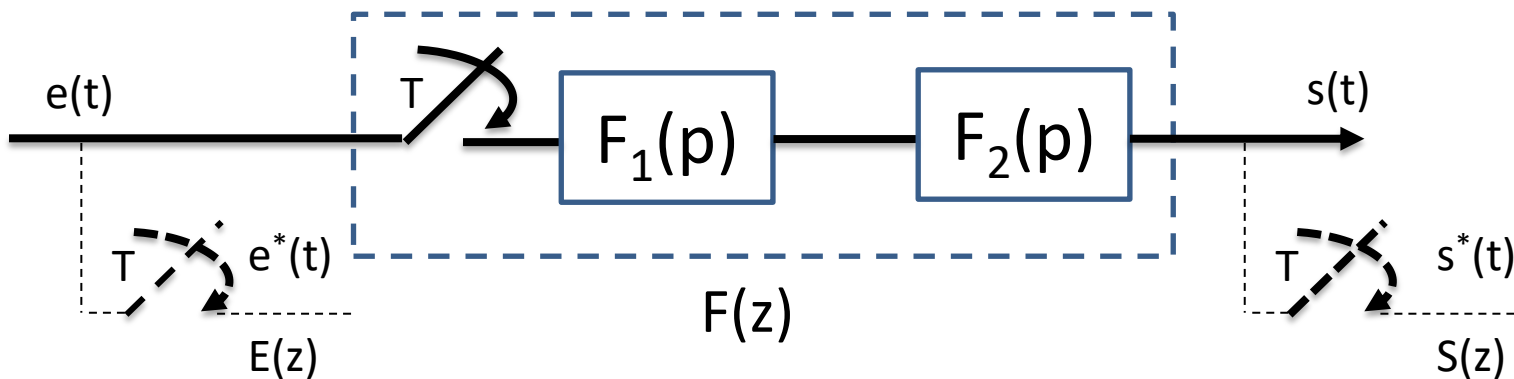
En multipliant  
par le terme  $z^{-2}$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## 1-3 Composition des fonctions de transfert en z

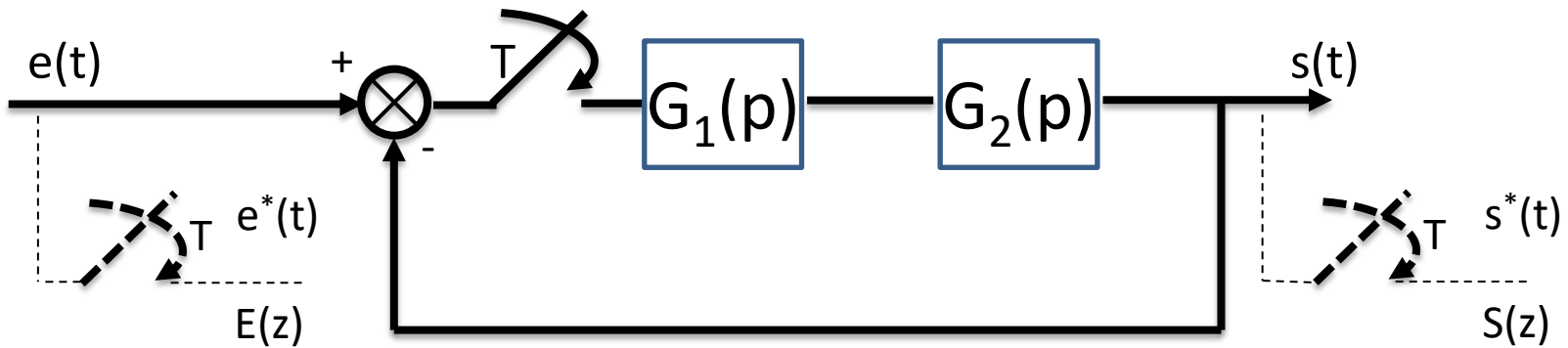


$$F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z)$$

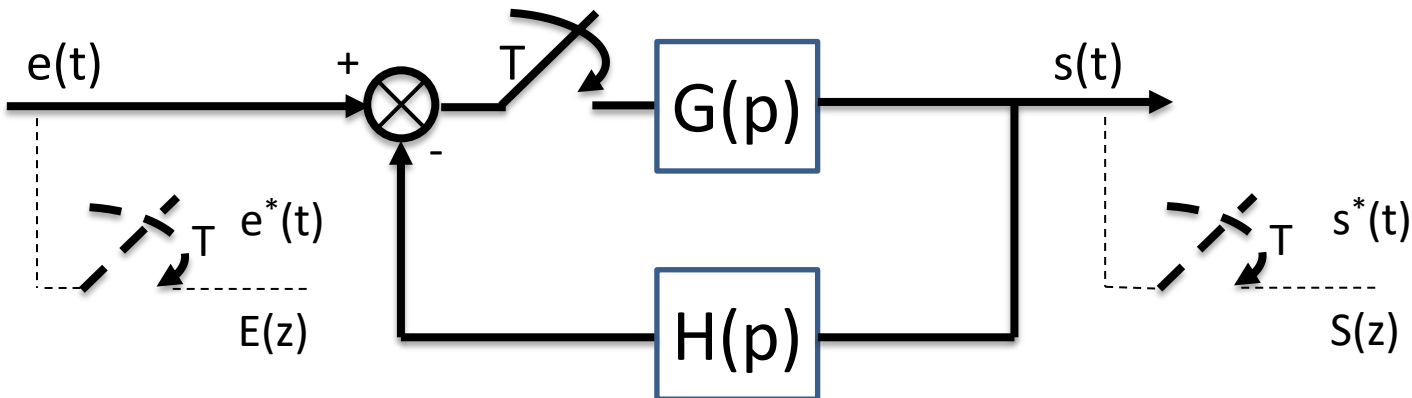


$$F(z) = \overline{F_1} \cdot \overline{F_2}(z)$$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

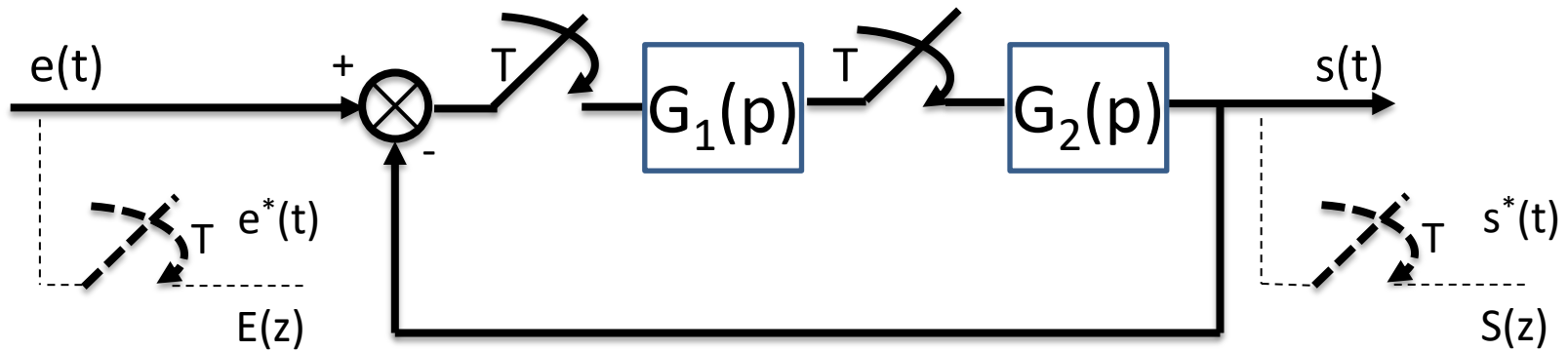


$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\overline{G_1 \cdot G_2}(z)}{1 + \overline{G_1 \cdot G_2}(z)}$$



$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{G \cdot H}(z)}$$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

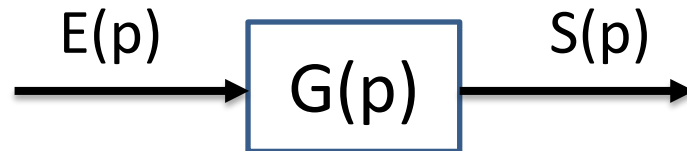


$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G_1(z).G_2(z)}{1 + G_1(z).G_2(z)}$$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## 2- Discrétisation des systèmes LTI monovariables continus

Soit un système asservis défini par une FT continue  $G(p)$  :



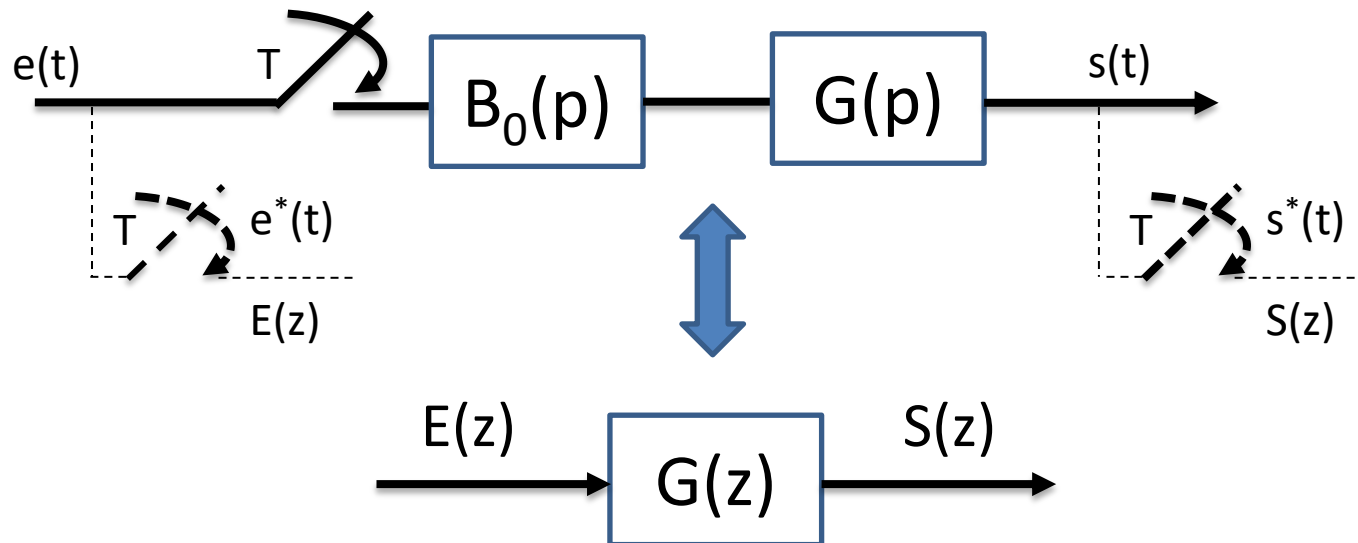
Plusieurs méthodes de discrétisation peuvent être utilisées afin de numériser ce système  $G(p)$ :

- la discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro (**BOZ**) ;
- la discrétisation par approximations d'Euler
- la discrétisation par approximation de Tustin

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## Discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

La fonction de transfert discrète du système  $G$  peut être obtenue par la discrétisation de la fonction de transfert continue  $G(p)$  en utilisant un bloqueur d'ordre zéro (**BOZ**), comme suit:



*Schéma fonctionnel d'un système LTI discret équivalent*

La sortie est donnée par :  $S(z) = \overline{B_0 \cdot G}(z) \cdot E(z)$

## Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

La fonction de transfert du bloqueur BOZ est :  $B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$

Donc : 
$$B_0(p)G(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot G(p)$$

On aura :

$$\overline{B_0 \cdot G}(z) = Z \left[ \frac{G(p)}{p} - \frac{e^{-Tp}}{p} G(p) \right] = Z \left[ \frac{G(p)}{p} \right] - Z \left[ \frac{e^{-Tp}}{p} G(p) \right]$$

Avec : 
$$Z \left[ \frac{e^{-Tp}}{p} G(p) \right] = z^{-1} \cdot Z \left[ \frac{G(p)}{p} \right]$$

La fonction de transfert discrète obtenue par le **BOZ** est donnée par :

$$G(z) = \overline{B_0 \cdot G}(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{G(p)}{p} \right]$$

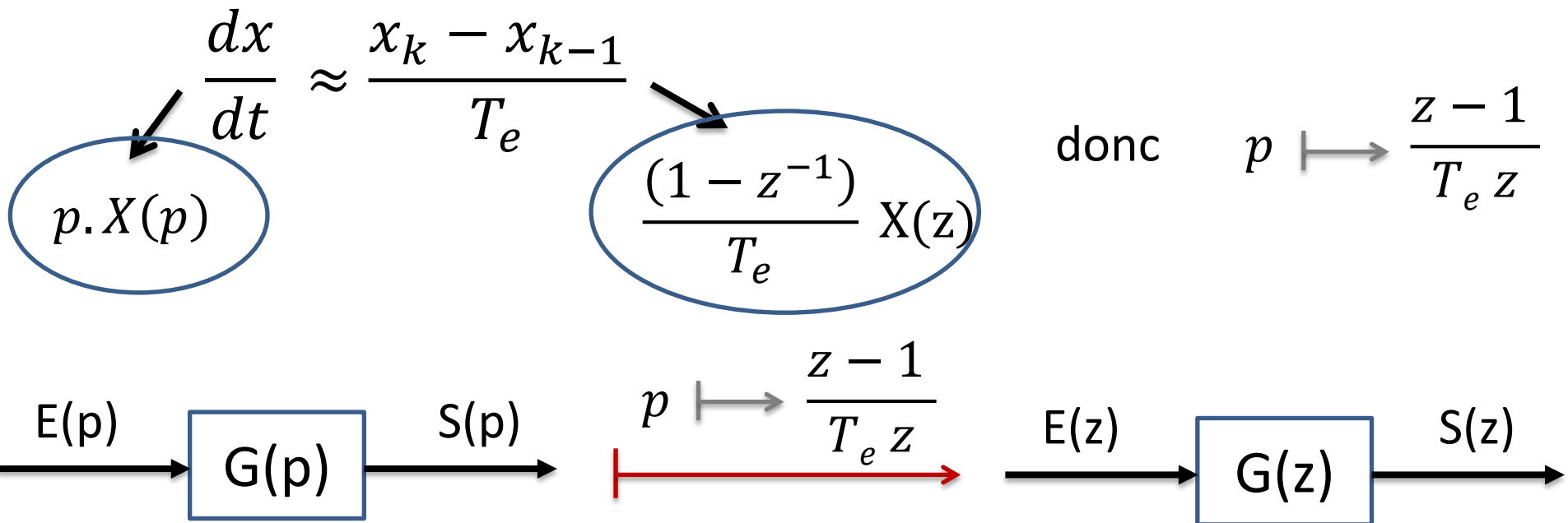
# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## Discrétisation par approximation d'Euler

Cette approche consiste à approximer la dérivée continue entre deux instants d'échantillonnage (principe d'Euler).

### 1- Discrétisation arrière (l'équivalence à la dérivation)

On considère que la variation  $dx/dt$  en temps continu correspond à la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage :

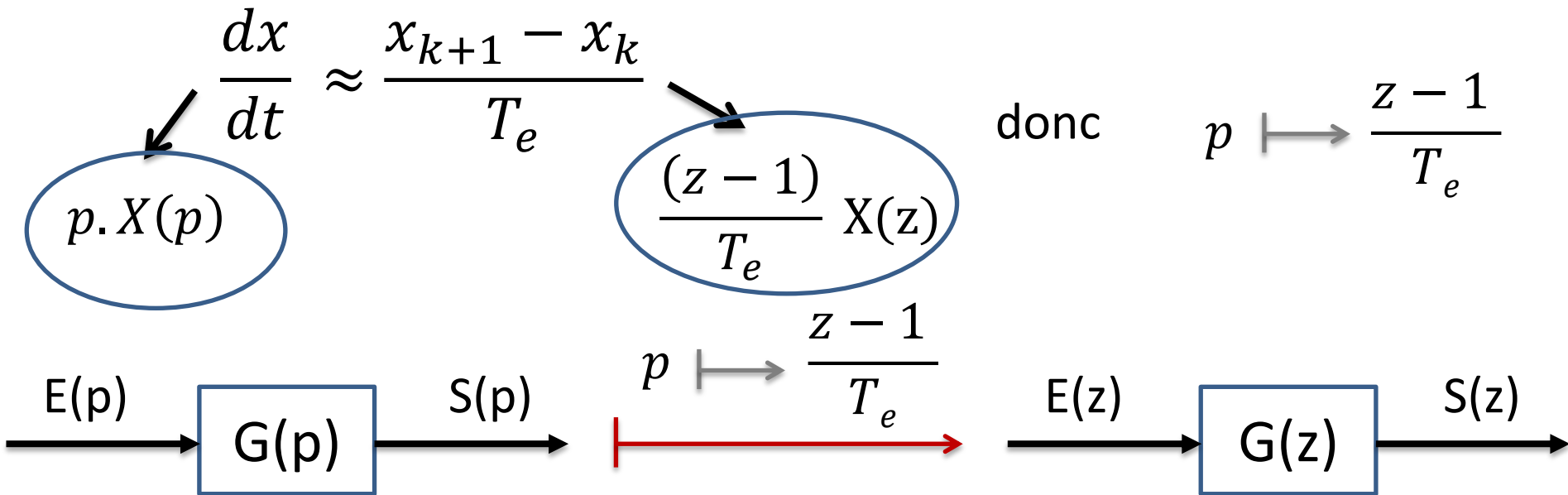


# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

La fonction de transfert discrète s'obtient comme suit

$$G(z) = G(p) \Big|_{p = \frac{z-1}{T_e z}}$$

## 2- Discrétisation avant



La fonction de transfert discrète s'obtient comme suit

$$G(z) = G(p) \Big|_{p = \frac{z-1}{T_e}}$$

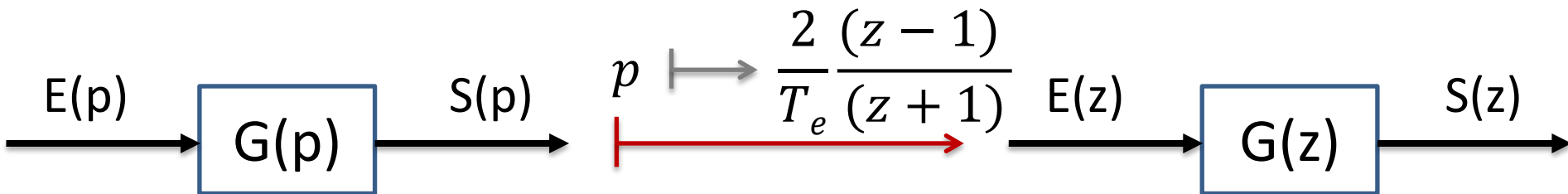
# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## Discrétisation par approximation de Tustin

*La dérivée numérique est proche de la moyenne des dérivées au point considérée et au point précédent*

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{G(p)}{p} \right] \frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T_e}$$

Il est possible d'obtenir la version discrète du système  $G(p)$  en utilisant l'approximation de 'Tustin' (approximation bilinéaire) par:



# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## Discrétisation par approximation de Tustin

Il s'agit de remplacer la variable complexe de Laplace ' $p$ ' par:

$$\text{la transformation bilinéaire } p \longmapsto \frac{2}{T_e} \frac{(z-1)}{(z+1)}$$

La fonction de transfert discrète s'obtient comme suit

$$G(z) = G(p) \Big|_{p = \frac{2}{T_e} \frac{(z-1)}{(z+1)}}$$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

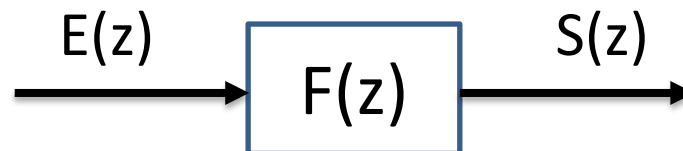
## 3- Equations aux différences (équations récurrentes)

Un système discret est régi ou défini par une équation de récurrence (équation aux différences) entre différents termes des séquences d'entrée  $e(k)$  et de sortie  $s(k)$ .

L'équation récurrente joue un rôle équivalent, dans l'étude des systèmes à temps discret, à celui que joue l'équation différentielle dans l'étude des systèmes à temps continu.

Soit la fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en  $z^{-1}$

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \quad n \geq m$$

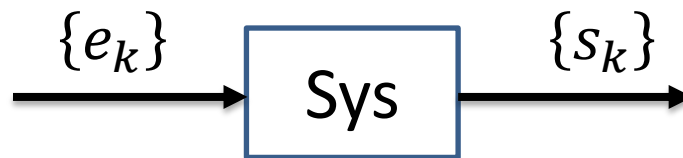


## Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

$$S(z) \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} = E(z) \sum_{j=0}^m b_j z^{-j}$$

L'équation récurrente d'un système discret s'écrit donc:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot s(k - i) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot e(k - j)$$



Cette formulation de l'équation récurrente est bien adaptée au calcul numérique.

La résolution de cette équation exige la connaissance des conditions initiales.

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## Exemple 1:

Soit un système défini par son équation de récurrence:

$$s(k + 1) - 0,5 \cdot s(k) = e(k)$$

Conditions initiales :  $s(0) = 0$

$e(k)$  : échelon unitaire

Calcul de la sortie  $s(k)$ :  $s(1) = 0,5 \cdot s(0) + e(0) = 1$

$$s(2) = 0,5 \cdot s(1) + e(1) = 1,5$$

$$s(3) = 0,5 \cdot s(2) + e(2) = 1,75$$

...

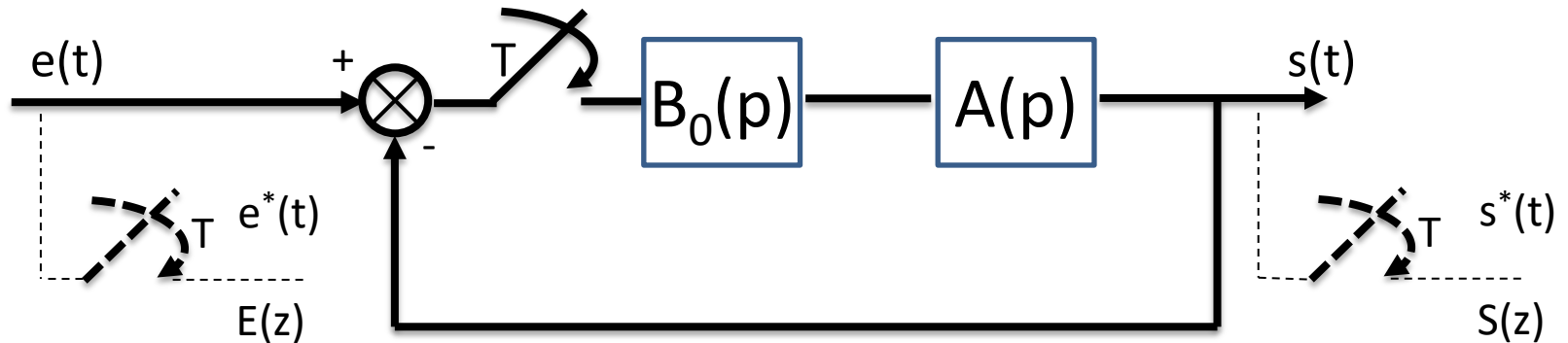
Quand  $k \rightarrow \infty$  ,  $s(k + 1)$  et  $s(k) \rightarrow l$  , avec  $e(k) = 1$

$$l - 0,5l = 1 \quad \text{donc} \quad s(\infty) = l = 2$$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

## Exemple 2:

On considère le système échantillonné asservi représenté par:



$$\text{Avec: } A(p) = \frac{4}{1+p} \quad \text{et } T = 0.2 \text{ s}$$

### F.T.B.O

$$\overline{B_0 \cdot A}(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{A(p)}{p} \right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{4}{p(1+p)} \right]$$

$$G(z) = \overline{B_0 \cdot A}(z) = 4 \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} = \frac{0,72}{z - 0,81}$$

# Cours 3 : Systemes échantillonnés (discrets)

F.T.B.F

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0,72}{z - 0,1}$$

Soit:  $S(z). (z - 0,1) = 0,72. E(z)$

L'équation de récurrence sera:  $s(k) = 0,1.s(k - 1) + 0,72.e(k - 1)$

Conditions initiales :  $s(0) = 0$

$e(k)$  : échelon unitaire

k	0	1	2	3	4	5	6
e(k)	1	1	1	1	1	1	1
s(k)	0	0,72	0,792	0,7992	0,7999	0,8	0,8

Théorème de la valeur finale:  $\lim_{k \rightarrow \infty} s(KT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) S(z)$

$$l = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \left[ \frac{0,72}{(z - 0,1)} \frac{z}{(z - 1)} \right] = 0,8$$