

Université de Djelfa
Faculté des Sciences et Technologies
Département d'Electronique et communications



Filière: Electrotechnique

Spécialité: Commande Electrique & Electrotechnique Industrielle

***Module: Asservissements échantillonnés et
Régulation Numérique***

**Cours 2 : Transformée en Z: propriétés et
applications**

Dr. Belgacem Said KHALDI

Niveau: Master 1, Semestre: S2

2025/2026

Mise à jour : 06/12/2023

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

Sommaire

1- Transformée en Z - Propriétés

2- Méthodes de calcul de la transformée en z

2-1 Utilisation de la définition (Passage de $f(t)$ à $F(z)$)

2-2 Méthode des résidus (Passage de $F(p)$ à $F(z)$)

3- La transformée en z inverse

3-1 Méthode de la division Polynomiale

3-2 Méthode de la décomposition en éléments simples

3-3 Méthode des résidus

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

1- Transformée en Z

Soit $f^*(t)$ le signal échantillonné de $f(t)$.

La transformée de Laplace de $f^*(t)$ est donnée comme suit :

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot e^{-kTp}$$

La transformée en z d'un signal échantillonné $f^*(t)$, est définie par la série de puissance négatives suivante (avec le changement de variable $z = e^{Tp}$:

$$F(z) = Z(f^*(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

où z est une variable complexe

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

Propriétés:

1-1 Linéarité : $Z[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)] = a \cdot Z[f_1(t)] + b \cdot Z[f_2(t)]$

1-2 Retard (translation temporelle) :

$$Z[f(t - KT)] = z^{-k} \cdot Z[f(t)]$$

où $f(t)$ est une fonction causale (nulle pour $t < 0$)

1-3 Théorème de la valeur initiale:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(KT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

1-4 Théorème de la valeur finale:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(KT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

La valeur finale existe si les pôles de la transformée $F(z)$ sont tous à l'intérieur du cercle unité

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

1-5 Multiplication par le temps:

$$Z[t \cdot f(t)] = -Tz \cdot \frac{dF(z)}{dz}$$

1-6 Théorème de la sommation :

$$Z[\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)] = \frac{z}{z-1} F(z)$$

1-7 Changement d'échelle :

Soit la suite d'échantillons: $x_k = a^k s_k$

Le signal $x(t)$ a pour transformée en z :

$$X(z) = S\left(\frac{z}{a}\right)$$

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

2- Méthodes de calcul de la transformée en z

2-1 Utilisation de la définition (Passage de $f(t)$ à $F(z)$)

$$F(z) = Z(f(t)) = \mathcal{L}[f^*(t)] \Big|_{z=e^{TP}} = F^*(p) \Big|_{z=e^{TP}}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

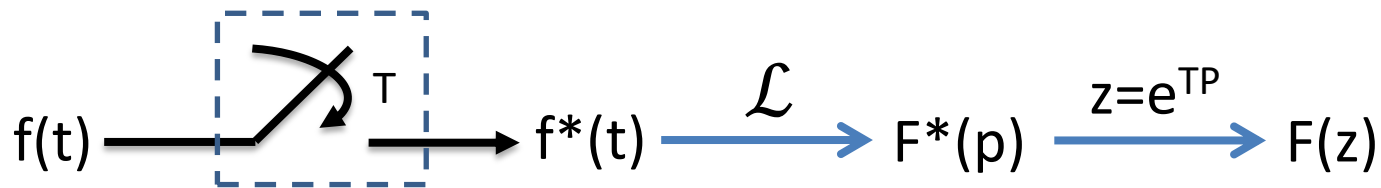


Diagramme de passage de $f(t)$ à $F(z)$

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

Exemple Calcul de la transformée en z de l'échelon unité $u(t)$

$$\begin{aligned} U(z) = Z(u(t)) &= U^*(p) \Big|_{z=e^{Tp}} = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT) \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} \end{aligned}$$

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}$ est une série géométrique de raison $q = z^{-1}$

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{avec } |z^{-1}| < 1$$

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

2-2 Méthode des résidus (Passage de $F(p)$ à $F(z)$)

Lorsqu'on sait la transformée de Laplace d'un signal continu $f(t)$, on peut calculer la transformée en z du signal $f(t)$ en utilisant la méthode des résidus :

$$F(z) = \sum_{p_i} r_i = \sum_{p_i} \left[\text{résidus de } \frac{F(p)}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right] \Bigg|_{p=p_i}$$

où :

p_i sont les pôles de la fonction $F(p)$.

r_i sont les résidus associés aux pôles p_i .

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

Cas de pôles simples

Lorsque la fonction $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ Possède n pôles simples p_i

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{N(p)}{D'(p)} \frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \Bigg|_{p=p_i} \quad \text{Equation 5-a}$$

$$\text{avec } D'(p) = \frac{dD(p)}{dp} \Bigg|_{p=p_i}$$

Cas de pôles multiples

Lorsque la fonction $F(p)$ ayant n pôles (p_1, p_2, \dots, p_n) d'ordres multiples respectivement m_1, m_2, \dots, m_n , la transformée en z sera :

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m_i - 1)!} \left[\frac{d^{m_i-1}}{dp^{m_i-1}} \left((p - p_i)^{m_i} F(p) \frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right) \right] \Bigg|_{p=p_i}$$

Equation 5-b

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

Exemple

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1}{p^2(p+1)}$$

Les pôles de $F(p)$:
$$\begin{cases} p_1 = -1 & \text{pole simple} \\ p_2 = 0 & \text{pole double } m_i = 2 \end{cases}$$

Le résidu associé au pôle simple $p_1 = -1$: (En utilisant l'équation 5-a)

$$F_1(z) = \frac{z}{z - e^{-T}} \quad \forall T > 0$$

Le résidu associé au pôle double $p_2 = 0$: (En utilisant l'équation 5-b)

$$F_2(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad \forall T > 0$$

La transformée en z totale s'écrit donc :

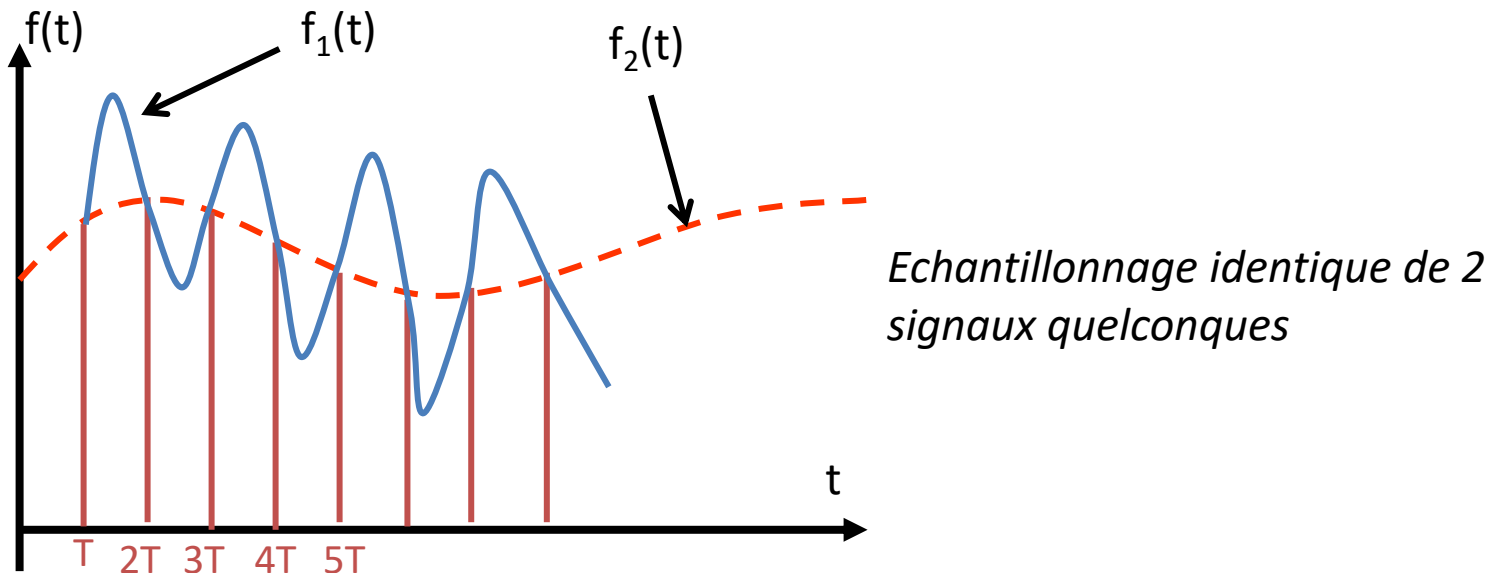
$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

3- La transformée en z inverse

Par définition, $F(z)$ ne contient aucune information sur $f(t)$ entre deux instants d'échantillonnage. Donc le passage de la transformée $F(z)$ en z à la fonction continue $f(t)$ n'est pas unique.

La transformée en z inverse ne restituera pas une fonction continue du temps mais simplement **une suite d'échantillons**.



Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

3-1 Méthode de la division Polynomiale

$F(z)$ se présente fréquemment comme une fraction rationnelle en z . Si on écrit $F(z)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en z^{-k} , la division de ces deux polynômes donne encore un polynôme en z^{-k}

Exemple

$$F(z) = \frac{2z - 3}{3z^2 + 2z - 1}$$

Calculons les premiers échantillons $f_k = f(kT)$ par division polynomiale

La division donne : $F(z) = \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{13}{9}z^{-2} + \frac{32}{27}z^{-3} + \dots$

Les premiers échantillons $f_k = f(kT)$ sont donc:

$$f_0 = 0, f_1 = \frac{2}{3}, f_2 = -\frac{13}{9}, f_3 = \frac{32}{27},$$

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

3-2 Méthode de la décomposition en éléments simples

Le principe de cette méthode est décrit comme suit :

- 1- Décomposer la fonction $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples
- 2- On multiplie par z chaque terme du développement
- 3- On prend la transformée inverse de chacun des éléments simples

Exemple

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

1- Décomposition:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{0,5}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{0,5}{z-2}$$

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

2- Multiplication par z :

$$F(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-2}$$

3- Transformée inverse en z de chaque élément:

$$f_k = f(kT) = Z^{-1}[F(z)] = Z^{-1}\left[\frac{1}{2}\right] - Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] + Z^{-1}\left[\frac{1}{2} \frac{z}{z-2}\right]$$

Calcul des échantillons en utilisant la table de la transformée en z :

$$f_k = f(kT) = \frac{1}{2} \delta(k) - u(k) + \frac{1}{2} 2^k \cdot u(k) \quad \forall k \geq 0$$

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

3-3 Méthode des résidus

L'ensemble d'échantillons $\{f(kT)\}$ est obtenu par l'expression suivante :

$$f(kT) = Z^{-1}[F(z)] = \sum_{p_i} r_i = \sum_{p_i} [\text{résidus de } z^{k-1} \cdot F(z)] \Big|_{z=p_i}$$

où p_i sont les pôles de la fonction $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

On définit le résidu r_i à un pôle d'ordre multiple m_i en $z=p_i$ par :

$$r_i = \frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}} [(z - p_i)^{m_i} z^{k-1} \cdot F(z)] \Big|_{z=p_i}$$

Cours 2: Transformée en Z: propriétés et applications

Exemple Calculons la transformée inverse en z de la fonction :

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad \forall T > 0$$

$$\begin{aligned} f(kT) &= \left[\text{résidus de } z^{k-1} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} \right] \Bigg|_{z=1} \\ &= \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 z^{k-1} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} \right] \Bigg|_{z=1} = KT \end{aligned}$$

D'où: $f_k = f(kT) = KT \quad \forall T > 0$

$$f_0 = 0, f_1 = T, f_2 = 2T, f_3 = 3T,$$