



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université ziane achoune djelfa
Faculté des sciences et la technologie
Département De Génie Civil

Polycopié

*Cours et exercices de la méthode
des éléments finis*

Préparé et présenté par
Mohamed LABED

Docteur en Génie Civil - Maître de Conférences B

Avant-propos

Le présent ouvrage est un cours et des exercices de la méthode des éléments finis (MEF) adressé essentiellement aux étudiants de 1ère année master Structure et Géotechnique de la filière Génie Civil et à d'autres spécialités éventuellement. Ce polycopié est élaboré dans le but de faciliter à l'étudiant l'assimilation et la compréhension des cours dispensés.

Ce cours s'articule autour de six chapitres. Le premier chapitre concerne un rappel sur le calcul matriciel; où sont exposés : le but, les pièces étudiées, les hypothèses considérées dans le calcul par éléments finis.

La deuxième partie concerne l'introduction à la méthode matricielle des déplacements où sont déterminés la matrice de rigidité ainsi que les relations contraintes déformations et déformations déplacements; dont la connaissance est essentielle aussi bien en RDM que dans d'autres spécialités.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un élément barre de treillis plan avec rigidité axiale seulement; à savoir la détermination des déplacements et des efforts normaux dans les barres.

Dans le quatrième chapitre, est étudiée des treillis plan ; à savoir la détermination les déplacements et les efforts normaux dans les barres.

Le cinquième chapitre est dédié à l'étude d'élément poutre continue; à savoir la détermination des déplacements en flexion et le phénomène concernant les poutres horizontales. Dans cette partie, sont déterminées les forces nodales équivalentes, à savoir : le moment fléchissant et l'effort tranchant, ainsi que les contraintes tangentielles.

Enfin, le sixième et dernier chapitre concerne l'étude d'un élément cadre plan ; à savoir la détermination des déplacements, des efforts normaux, des efforts tranchants et des moments fléchissants dans les poutres.

Ayant la théorie, les étudiants pourront se référer aux principales questions qui sont illustrées par des exemples et des applications simples qui, toutefois, sont traités d'une manière très détaillée.

Table des matières

Avant-propos	I
Table des matières	II
Chapitre 1 : Rappels sur le calcul matriciel	1
1.1 Notion de matrice	1
1.2 Opérations de base	2
1.2.1 Addition	2
1.2.2 Produit	3
1.2.2 Matrice transposée	5
1.3 Matrices carrées	6
1.3.1 Matrice identité	6
1.3.2 Matrice inverse	6
1.3.3 Méthodes de résolution de systèmes linéaires	8
Chapitre 2 : Méthode matricielle des déplacements « méthode de rigidité »	10
2.1 Introduction	10
2.2 Matrice de rigidité	12
2.3 Propriété de la matrice de rigidité	15
2.4 Éclatement ↔ assemblage	16
2.5 Formulation de la méthode de rigidité dite « directe »	17
Chapitre 3 : Élément barre de treillis plan (rigidité axiale seulement)	18
3.1 Matrice de rigidité	18
3.2 Forces nodales équivalentes	20
Exercices	22
Chapitre 4 : Élément barre de treillis plan	30
4.1 Rotation des axes (matrice de rotation)	30
4.2 Rotation des matrice de rigidité et vecteur forces	31
Exercices	33
Chapitre 5 : Élément poutre continue (flexion seulement)	44
5.1 Matrice de rigidité	44
5.2 Forces généralisées	47
Exercices	49
Chapitre 6 : Élément cadre plan (poutre de Bernoulli)	60
6.1 Matrice de rigidité	60
6.2 Rotation des axes (matrice de rotation)	61
6.2 Rotation des matrice de rigidité et vecteur forces	62
Exercices	64
Bibliographie	78

1. Rappels sur le calcul matriciel

Le calcul par éléments finis nécessitant le maniement de nombreuses valeurs numériques, il est plus aisé d'exprimer celles-ci sous forme matricielle.

En regroupant des termes de même nature au sein d'une seule et même variable, cette écriture plus synthétique permet en effet une meilleure compréhension des différentes phases de construction de la méthode.

Ceci nécessite néanmoins la maîtrise des opérations de base associées à ce type de calcul : l'addition ou le produit de plusieurs matrices, la résolution de systèmes linéaires, etc.

1.1 Notion de matrice

Soit la fonction polynomiale suivante :

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad \text{avec } x \in [0, L] \quad (1.1)$$

Et sa dérivée :

$$v'(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad (1.2)$$

Supposant que $v(x)$ et $v'(x)$ valent v_1 et β_1 en $x=0$, v_2 et β_2 en $x=L$, on peut aisément établir le système de 4 équations suivant :

$$\begin{cases} v_1 = v(0) = \alpha_0 \\ \beta_1 = v'(0) = \alpha_1 \\ v_2 = v(L) = \alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3 \\ \beta_2 = v'(L) = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Cependant, ce système peut être exprimé de manière plus synthétique sous forme

matricielle en posant que le vecteur $\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \beta_1 \\ v_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$ peut être relié au vecteur $\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$ via

une matrice $[R]$.

Anticipant sur les règles relatives au produit des matrices, on a donc :

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \beta_1 \\ v_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [R]\{\alpha\}$$

équivalent au système d'équations (1.3).

Dans ce cas $\{v\}$ et $\{b\}$ sont des vecteurs « colonne » à 4 lignes alors que la matrice $[R]$ est une matrice dite carrée à 4 lignes et 4 colonnes. De manière générale, une matrice peut être caractérisée par un ensemble de nombres ordonnés et regroupés en n lignes et m colonnes.

On aura alors une matrice de dimensions $n \times m$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1j} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2j} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot & a_{ij} & \cdot & a_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nj} & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

a_{ij} caractérisant le terme des $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $[A]$. Si $n = 1$ ou $m = 1$, la matrice sera associée suivant le cas, soit à un vecteur ligne, soit à un vecteur colonne qui sont généralement notés $\{ \}$. De plus et spécifiquement pour les matrices dites carrées ($n = m$), les termes a_{ii} seront appelés termes diagonaux et formeront la diagonale de la matrice.

1.2 Opérations de base

1.2.1 Addition

Soit deux matrices $[A]$ et $[B]$ de mêmes dimensions $n \times m$ construites à partir de (1.4), la somme des matrices $[A]$ et $[B]$ nous donnant une matrice $[C]$ de mêmes dimensions, sera obtenue en posant que chacun des termes c_{ij} est égal à $a_{ij} + b_{ij}$. On aura alors : $[C] = [A] + [B]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1j} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2j} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot & a_{ij} & \cdot & a_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nj} & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1j} & \cdot & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2j} & \cdot & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdot & b_{ij} & \cdot & b_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & b_{nj} & \cdot & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1j} & \cdot & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & c_{2j} & \cdot & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdot & c_{ij} & \cdot & c_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & c_{nj} & \cdot & c_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdot & a_{1j}+b_{1j} & \cdot & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdot & a_{2j}+b_{2j} & \cdot & a_{2m}+b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdot & a_{ij}+b_{ij} & \cdot & a_{im}+b_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdot & a_{nj}+b_{nj} & \cdot & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une soustraction des matrices $[A]$ et $[B]$, on posera de la même façon :

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (1.5)$$

Exemple : Soit les matrices

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Trouver $[C]=[A] + [B]$ et $[D]=[A] - [B]$.

Donc ;

$$[C] = [A] + [B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+4 & 1+0 \\ 0+2 & 4+3 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[D] = [A] - [B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-4 & 1-0 \\ 0-2 & 4-3 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

1.2.2 Produit

Produit d'une matrice par un scalaire

Soit une matrice $[A]$ de dimensions $n \times m$, la matrice $[C]$, produit de la matrice $[A]$ par le scalaire λ sera obtenue en multipliant chacun des termes de la matrice $[A]$ par λ . On aura donc :

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad (1.6)$$

Exemple :

$$[C] = 3 \cdot [A] = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 0 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Produit de 2 matrices

Soit deux matrices $[A]$ et $[B]$ de dimensions respectives $n \times m$ et $m \times l$, la matrice $[C]$, produit des matrices $[A]$ et $[B]$, de dimensions $n \times l$, sera obtenue en posant que les termes c_{ij} sont égaux à :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (1.7)$$

Par exemple, on trouvera pour le premier terme :

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1m} \cdot b_{m1}$$

Cependant et pour que ce produit soit possible, il est important de noter que le nombre de colonnes de la matrice $[A]$ doit être égal au nombre de lignes de la matrice $[B]$. Donc, pour cela, le produit matriciel n'est pas commutatif. Généralement, $[A] \cdot [B] \neq [B] \cdot [A]$.

Exemple : Soit les matrices

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trouver $[C] = [A] \cdot [B]$

$$[C] = [A] \cdot [B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$$

Produit de 3 matrices

Soit trois matrices $[A]$, $[B]$ et $[C]$ de dimensions respectives $n \times m$, $m \times l$ et $l \times p$, la matrice $[F]$, produit des matrices $[A]$, $[B]$ et $[C]$, de dimensions $n \times p$ sera obtenue en effectuant dans un premier temps soit le produit $[A] \cdot [B]$ soit celui de $[B] \cdot [C]$, les deux approches amenant au même résultat.

$$[F] = [A] \cdot [B] \cdot [C] = [A] \cdot \overbrace{[B] \cdot [C]}^{[D]} = [A] \cdot [D] = \overbrace{[A] \cdot [B]}^{[E]} \cdot [C] = [E] \cdot [C]$$

Exemple : Soit les matrices

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [[A] \cdot [B]] \cdot [C] &= \left[\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 28 \\ -18 & 35 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [A] \cdot [[B] \cdot [C]] &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right] \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 28 \\ -18 & 35 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

1.2.3 matrice transposée

Soit la matrice $[A]$ de dimensions $n \times m$, la matrice $[B]$ de dimensions $m \times n$ transposée de $[A]$ (notée $[A]^T$) sera obtenue en posant pour chacun des termes de $[B]$ que $b_{ij} = a_{ji}$.

Pratiquement, ce calcul revient à échanger les lignes et les colonnes de la matrice $[A]$.

Exemple : Soit la matrice

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad [A]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

On notera par ailleurs que : $([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$ (1.8)

Exemple : Soit les matrices

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trouver les produits $([A] \cdot [B])^T$ et $[B]^T \cdot [A]^T$

$$[[A] \cdot [B]]^T = \left[\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]^T = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 14 & 17 \end{bmatrix}$$

$$[B]^T \cdot [A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 14 & 17 \end{bmatrix}$$

Donc : $([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$

1.3 Matrices carrées

1.3.1 Matrice identité

La matrice identité, notée $[I]$, est une matrice carrée dont les termes diagonaux sont égaux à 1, tous les autres étant nuls. De ce fait, le produit de la matrice identité par une matrice $[A]$ quelconque (ou inversement) est égal à la matrice $[A]$ elle-même.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [A] \cdot [I] = [I] \cdot [A] = [A] \quad (1.9)$$

1.3.2 Matrice inverse

La matrice inverse de $[A]$ notée $[A]^{-1}$ est définie telle que $[A]^{-1} \cdot [A] = [A] \cdot [A]^{-1} = [I]$ et peut

$$\text{être calculée en posant : } [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \cdot \text{com}[A]^T \quad (1.10)$$

où $\text{com}[A]$ et $\det[A]$ sont respectivement la comatrice et le déterminant de la matrice $[A]$.

La matrice $[A]$ sera donc réversible à condition que son déterminant soit différent de 0.

Calcul du déterminant

- 2 dimensions :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (1.11)$$

- 3 dimensions :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Aussi qui peut être calculé grâce à la règle de Sarrus :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad (1.12)$$

----- + Produit des 3 termes

----- - Produit des 3 termes

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Calcul de la comatrice et la matrice inverse

La comatrice de $[A]$, notée $com [A]$, correspond à la matrice des cofacteurs de $[A]$. Le cofacteur du terme i, j de la matrice $[A]$ est obtenu en multipliant par $(-1)^{i+j}$ le déterminant de la sous-matrice issue de la suppression des ligne i et colonne j .

- 1 dimension :

$$[A] = a_{11} \Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{a_{11}} \quad (1.13)$$

- 2 dimensions :

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow com[A] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow [A]^{-1} &= \frac{1}{\det[A]} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

- 3 dimensions :

$$\begin{aligned}
 [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &\Rightarrow \text{com}[A] = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (1.15) \\
 \Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} & a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{31} & a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31} \\ a_{13} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{33} & a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} & a_{12} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{32} \\ a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} & a_{13} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} & a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

Exemple : Trouver l'inverse de deux matrices suivantes :

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 [A]^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\
 [B] &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} -6 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 11 & -10 & 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & -11 \\ -5 & -1 & 10 \\ 4 & 1 & -8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

1.3.3 Méthodes de résolution de systèmes linéaires

Considérant n équations à n inconnues (qui sont regroupées dans le vecteur $\{q\}$), la résolution du système linéaire de type $[K] \cdot \{q\} = \{F\}$ amène à isoler le vecteur $\{q\}$ de manière à obtenir :

$$[K] \cdot \{q\} = \{F\} \Leftrightarrow \underbrace{[K]^{-1} \cdot [K]}_{[I]} \cdot \{q\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \Leftrightarrow \{q\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \quad (1.16)$$

Ceci suppose bien sûr que le déterminant de la matrice $[K]$ est différent de 0.

Dans le cas contraire, on parlera de système singulier. Nous verrons d'ailleurs par la suite qu'en éléments finis la singularité de la matrice de rigidité $[K]$ est souvent à associer à un problème de conditions d'appui.

De plus, la méthode de calcul par éléments finis amenant dans la plupart des cas à la résolution d'un système de n équations à n inconnues de grandes dimensions.

Les outils de calcul par éléments finis font donc très souvent appel à des méthodes plus pertinentes telles que celles par élimination de Gauss, de Cholesky ou frontale.

Il existe deux grandes familles de méthodes de résolution : les méthodes directes (Gauss, Cholesky, frontale, etc.) et les méthodes itératives (gradients conjugués).

Leur efficacité sera directement liée aux performances du ou des processeurs de l'ordinateur utilisé, de la vitesse d'accès au disque dur mais surtout de la quantité de mémoire vive (RAM) disponible.



2. Méthode matricielle des déplacements « méthode de rigidité »

2.1 Introduction :

La méthode directe dite méthode de rigidité (où méthode matricielle) qu'on va étudier dans ce chapitre fait appel aux équations d'équilibre principalement. On y ajoute aussi les lois constitutives du matériau ainsi que les relations déformations/déplacement. L'objectif est d'introduire, à partir des relations simples les propriétés de rigidité d'un élément, même si les méthodes directes sont restreintes surtout pour la formulation d'éléments compliqués, l'exercice mérite qu'on attache une certaine importance pour les raisons qui deviendront claires dans les chapitres subséquents.

La méthode matricielle des déplacements est une version rigide et systématique de la version manuelle ; en vue de son application sur ordinateur. La plupart des programmes d'éléments finis sont construits selon cette démarche stricte et bien organisée.

On illustre la méthode avec trois éléments simples, celui de barre de treillis plan, de poutre continue et celui du cadre plan (éléments prismatiques ; théorie de Bernoulli-Navier ; prise en compte de la déformation d'effort normal) ; comme les ingénieurs calculent aujourd'hui pratiquement toutes leurs structures en barres et poutres à l'ordinateur, une bonne connaissance dans ce domaine est indispensable.

Dans la méthode de rigidité, ce sont les inconnus déplacements qui dirigent toutes les manœuvres. Leur nombre leur nature, leur sens dictent les opérations algébriques et matricielles, le type des forces nodales qui leur sont associées, l'importance du problème à résoudre, le choix des méthodes de travail,...etc. (Figure 2.1).

En conséquence, pour établir où comprendre la structure d'une équation, c'est d'abord du côté des déplacements qu'il faut regarder.

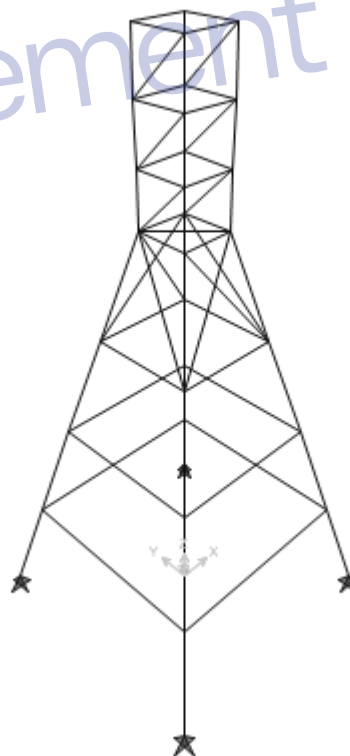


Figure 2.1 Discretisation 3D en barre de treillis spatial d'un Pylône. (NTDL=84)

➤ Le comportement **axial** est décrit par les équations :

- ♦ Statique (équilibre)

$$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0$$

- ♦ Cinématique (déformation)

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x}$$

- ♦ Loi de comportement (Hooke)

$$N = E A \varepsilon$$

⇒ L'équation différentielle d'équilibre est

$$E A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + q_x = 0$$

➤ Le comportement **flexionnel** (ou transversal) est décrit par les équations :

- ♦ Statique (équilibre)

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q_y = 0$$

- ♦ Cinématique (déformation)

$$\Psi = -\frac{d^2 V}{dx^2}$$

- ♦ Loi de comportement (Hooke)

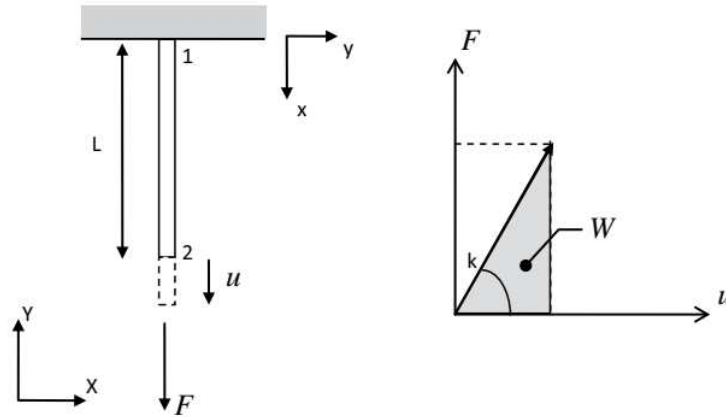
$$M = E I \Psi$$

⇒ L'équation différentielle d'équilibre est :

$$E I \frac{d^4 V}{dx^4} - q_y = 0$$

2.2 Matrice de rigidité

Soit un barreau de longueur L et de section constante A soumis à une charge extérieure F ,



Posant que $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{u - 0}{L}$ et $\sigma_{xx} = \frac{F}{A}$, la relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \Leftrightarrow \frac{F}{A} = E \cdot \frac{u}{L} \Rightarrow F = \left[\frac{EA}{L} \right] \cdot u = [k] \cdot u \quad \text{avec } k = \frac{EA}{L} \text{ correspondant dans le domaine}$$

élastique à la rigidité du barreau et à la pente de la droite $F = k \cdot u$. La déformation ε_{xx} étant indépendante de x , l'énergie de déformation devient :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} dV = \frac{1}{2} \int_V E \cdot \varepsilon_{xx}^2 dA \cdot dx = \frac{E \cdot \varepsilon_{xx}^2}{2} \cdot \underbrace{\int_A dA}_A \cdot \underbrace{\int_0^l dx}_L \\ &= \frac{EAL}{2} \left(\frac{u}{L} \right)^2 = \frac{k}{2} \cdot u^2 \end{aligned}$$

De plus et sachant que le travail de la force F est égal à $F \cdot u$, l'énergie potentielle s'exprimera sous la forme :

$$E = W - T = \frac{k}{2} \cdot u^2 - F \cdot u$$

Considérant un problème statique, ce qui signifie qu'après obtention de l'équilibre, le déplacement u n'évolue plus, la variation du potentiel par rapport à u sera alors nulle d'où :

$$\frac{dE}{du} = 0 = k \cdot u - F \Leftrightarrow k \cdot u = F$$

D'où le déplacement u .

Les relations entre déplacements et déformations écrite par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Sous forme matriciel

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

sous une forme plus synthétique $\{\varepsilon\} = [\partial] \cdot \{u\}$, le vecteur des déformations pourra être exprimé en fonction des déplacements nodaux par la suppositions d'une barre de longueur L avec une section uniforme A.



si le champ axial :

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (2.1-a)$$

Ce champ caractérise la déformation axiale de la barre. On peut écrire la relation (2.1-a) sous forme matricielle:

$$u(x) = \langle 1 \quad x \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (2.1-b)$$

Ou bien :

$$u(x) = [G] \{ \alpha \} \quad (2.1-c)$$

Si on exprime les D.D.L en fonction des constantes α_1 et α_2 , on peut écrire alors :

$$u|_{x=0} = u_1 ; u|_{x=L} = u_2 \quad (2.2)$$

$$(2.1-c) \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Ou bien : } \{q\} = [A] \{ \alpha \} \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1} \{q\} \quad (2.4)$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Et la substitution de (2.4) dans (2.1-c) représente le champ U en fonction des D.D.L nodaux, soit :

$$u(x) = \langle 1 \quad x \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$u(x) = \langle (1 - \frac{x}{L}) \quad (\frac{x}{L}) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N] \{q\} \quad (2.6)$$

$$\text{Avec} \quad N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad ; \quad N_2 = \frac{x}{L}$$

$$\text{Donc} \quad \{\varepsilon\} = [\partial] \{u\} = \underbrace{[\partial][N]}_{[B]} \{q\} = [B] \cdot \{q\} \quad (2.7)$$

Avec $[\partial]$: opérateur dérivation dont les dimensions dépendent de celles de l'élément étudié.

$$\text{Soit pour l'élément barre : } \{\varepsilon\} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \langle (1 - \frac{x}{L}) \quad (\frac{x}{L}) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\langle (-\frac{1}{L}) \quad (\frac{1}{L}) \rangle}_{[B]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Le champ de contrainte étant obtenu à partir de la relation contrainte-déformation

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad \text{Ici : } [D] = E \quad (2.8)$$

Par conséquent :

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

L'énergie de déformation W_e associée à l'élément e peut être déduite en posant :

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T \cdot \sigma dV_e$$

et nous avons $\{\varepsilon\}^T = \{q_e\}^T \cdot [B]^T$ et $\sigma = [D] \cdot [B] \cdot \{q_e\}$ donc

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{q_e\}^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{q_e\} dV_e$$

$$= \frac{1}{2} \{q_e\}^T \cdot \underbrace{\left(\int_{V_e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV_e \right)}_{[K_e]} \cdot \{q_e\} = \frac{1}{2} \{q_e\}^T \cdot [K_e] \cdot \{q_e\}$$

Avec $[K_e] = \int_{V_e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV_e$ la matrice de rigidité élémentaire de l'élément e .

Si l'aire de la section de l'élément est constant : $\int_{V_e} dv_e = A \int_L dx$ (2.10)

$$[K_e] = \int_L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} EA \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} dx \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \int_L \frac{-1}{L} EA \frac{-1}{L} dx = \frac{EA}{L} \\ K_{12} &= \int_L \frac{-1}{L} EA \frac{1}{L} dx = -\frac{EA}{L} \\ K_{21} &= \int_L \frac{1}{L} EA \frac{-1}{L} dx = -\frac{EA}{L} \\ K_{22} &= \int_L \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} dx = \frac{EA}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [K_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3 Propriété de la matrice de rigidité

1) $[K_e]$ symétrique ($K_{ij} = K_{ji}$)

Cette propriété peut être démontrée aisément en appliquant le théorème de Betti:

"Soient deux points i et j où agissent une force F_i et une force unitaire. La force F_i produit en j un déplacement dont la projection sur F_j vaut U_j . De même, F_i produit en i un déplacement dont la projection sur F_i vaut U_i . On a $U_i = U_j$ "

2) Représente le mouvement rigide de l'élément. $\Rightarrow [K_e]$ est singulière

La poutre étudiée jusqu'à présent n'est soumise à aucune condition d'appui. Elle peut donc subir une translation ou une rotation sans subir de déformations. Ce sont des déplacements dites de "corps rigide" ou "déplacement d'ensemble".

Remarque

Dans les paragraphes qui suivent, on suppose que les conditions d'appui ont été introduites de manière à rendre $[K_e]$ non singulière.

3) $[K_e]$ est définie positive

$$\Rightarrow W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} > 0 \rightarrow [K_e] \text{ est singulière} \quad (2.13)$$

Cette relation exprime que la matrice $[K]$ est définie positive. En particulier, tous les termes diagonaux de $[K]$ sont positifs. En effet, l'application d'une force en un point provoque un déplacement de ce point tel que sa projection sur la force est positive.

Remarque

Les propriétés énoncées ci-dessous sont valables quelque soit le système d'axes (x,y) ou (x',y') utilisé. Elles s'appliquent donc aussi à la matrice $[K']$.

Lorsque les inconnues sont choisies dans l'ordre conventionnel, le découplage reste visible au niveau des sous matrices de $[K_e]$ en axes locaux ; par contre, il est effacé par la relation en axes globaux.

La technique de combinaison d'états indépendants, exprimée par (1.80), s'applique aussi aux vecteurs réactions sous charge et est couramment utilisée dans la méthode des éléments finis.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_N]_{(2 \times 2)} & [0]_{(2 \times 4)} \\ [0]_{(4 \times 2)} & [K_M]_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}$$

(1.87)

Hors diagonale principale, les sous matrices nulles expriment le découplage N-M.

2.4 Éclatement ↔ assemblage

Méthode classique de Bouleanne:

Construction de la matrice $[K^*]$:

construction de $[K_e]$

$$[K] = \sum_{i=1}^{NTEL} [K_i^*] \quad (2.14)$$

La construction de $[K_e^*]$ se fait par le biais de la matrice « Bouleanne » $[A_e]$.

$$\{F_e^*\} = [A_e]^T \{F\} \quad (2.15)$$

$$[K_e^*] = [A_e]^T [K_e] [A_e] \quad (2.16)$$

$[A_e]$: matrice « Bouleanne » déduite de la connectivité entre nœuds :

$$\begin{cases} A_{ij} = 0 & \text{pas de connection} \\ A_{ij} = 1 & \exists \text{ une connection} \end{cases}$$

Remarque

Pour plus de détail concernant la matrice de « Bouleanne » $[A_e]$, voir le chapitre IV.

2.5 Formulation de la méthode de rigidité dite « directe »

La formulation de la matrice de rigidité d'un élément fini de structure se résume par les étapes suivantes :

1. Exprimer le champ de déplacement en fonction des degrés de liberté généralisés $\{q\}$;
2. Différencier les déplacements pour connaître les déformations $\{\varepsilon\}$;
3. Application des lois constitutives pour trouver les contraintes $\{\sigma\}$;
4. Trouver les forces aux nœuds $\{F\}$ qui seraient statiquement équivalentes aux contraintes, d'où l'on déduit la relation entre $\{F\}$ et $\{q\}$.

La procédure est appliquée à quatre exemples :

- un élément barre avec rigidité axiale seulement (élément barre bi-articulé).
- un élément barre de treillis plan (élément barre bi-articulé).
- un élément poutre continue (élément poutre flexionnel).
- un élément cadre plan.

3. Elément barre de treillis plan (rigidité axiale seulement)

3.1 Matrice de rigidité



Supposons une barre de longueur L avec une section uniforme A .

a) champ axial :

$$U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.1)$$

Ce champ caractérise la déformation axiale de la barre. On peut écrire la relation (3.1) sous forme matricielle:

$$U(x) = \langle 1 \quad x \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Ou bien :

$$U(x) = [G] \{ \alpha \} \quad (3.3)$$

Si on exprime les D.D.L en fonction des constantes α_1 et α_2 , on peut écrire alors :

$$U|_{x=0} = U_1 ; U|_{x=L} = U_2 \quad (3.4)$$

$$(1.25) \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Ou bien : } \{ q \} = [A] \{ \alpha \} \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \{ \alpha \} = [A]^{-1} \{ q \} \quad (3.6)$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Et la substitution de (3.6) dans (3.3) représente le champ U en fonction des D.D.L nodaux, soit :

$$U(x) = \langle 1 \quad x \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$U(x) = \langle (1 - \frac{x}{L}) \quad (\frac{x}{L}) \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = N_1 U_1 + N_2 U_2 = [N] \{q\} \quad (3.8)$$

$$\text{Avec} \quad N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad ; \quad N_2 = \frac{x}{L}$$

b) on différencie le champ de déplacement défini en (3.8) :

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial}{\partial x} \{U(x)\} = \frac{\partial}{\partial x} [N] \{q\} = [B] \{q\} \quad (3.9)$$

Et on différencie le champ de déplacement :

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial U}{\partial X} = \langle 0 \quad 1 \rangle \{\alpha\} = [B_\alpha] \{\alpha\} \quad (3.10)$$

Si on substitue (3.6) dans (3.10) on obtient :

$$\{\varepsilon\} = [B_\alpha] [A]^{-1} \{q\} = [B] \{q\} \quad (3.12)$$

$$\text{Par analogie} \quad [B] = [B_\alpha] [A]^{-1} = [N'] \quad (3.13)$$

c) maintenant, cette étape consiste à appliquer la relation constitutive :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.14)$$

$$\text{Ici :} \quad [D] = E$$

Substituant (3.12) dans (3.14) on obtient :

$$\{\sigma\} = E [B] \{q\} = [S] \{q\} \quad (3.15)$$

Ou :

$$[S] = E [B] = E [B_\alpha] [A]^{-1} \quad (3.16)$$

$[S]$: est la matrice qui relie les contraintes aux D.D.L.

Dans notre cas :

$$\{\sigma\} = \sigma_x \text{ et } [D] = E$$

Par conséquent :

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$



Figure 3.1: diagramme de contrainte et de déformation

d) calcul de la matrice de rigidité $[\overline{K}_e]$:

$$[\overline{K}_e] = \int_{v_e} [B]^T [D][B] dv \quad (3.18)$$

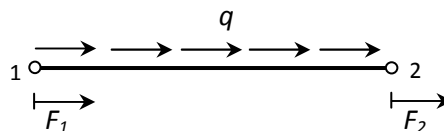
$$\int_{v_e} dv = A \int_L dx \quad (3.19)$$

$$[\overline{K}_e] = \int_L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} EA \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx \quad (3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \int_L \frac{-1}{L} EA \frac{-1}{L} dx = \frac{EA}{L} \\ K_{12} &= \int_L \frac{-1}{L} EA \frac{1}{L} dx = -\frac{EA}{L} \\ K_{21} &= \int_L \frac{1}{L} EA \frac{-1}{L} dx = -\frac{EA}{L} \\ K_{22} &= \int_L \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} dx = \frac{EA}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\overline{K}_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.2 Forces nodales équivalentes :

1^{er} cas : force répartie constante



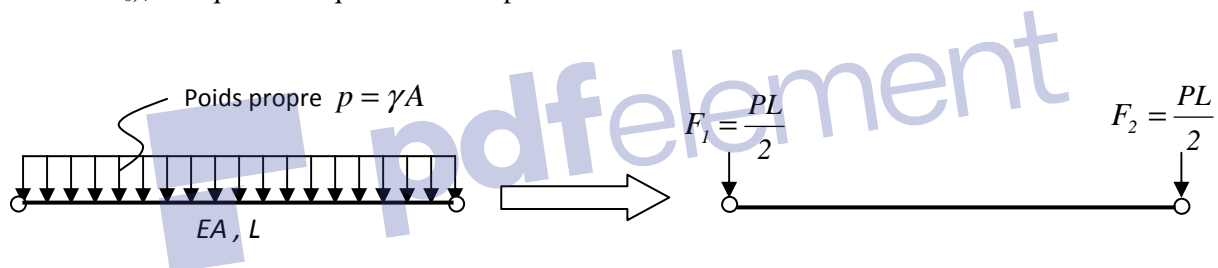
$$\{f^s\} = q$$

$$\Rightarrow \{F_e^s\} = \int_L [N]^T \{f_e^s\} dx \quad (3.22)$$

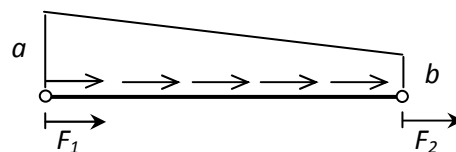
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \int_L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} q dx = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

2^{ème} cas : Cas du poids propre d'une barre

La notion de charge répartie transversale sur une barre de treillis n'est pas cohérente avec la théorie, la barre n'ayant aucune raideur flexionnelle. Le poids propre d'une barre (figure ci-dessous) doit être modélisé par deux charges concentrées nodales F_1 et F_2 (et non pas par un vecteur de forces nodales K_0), statiquement équivalentes au poids total de la barre.



3^{ème} cas : charge répartie linéairement



$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)a + \frac{x}{L}b \quad (3.24)$$

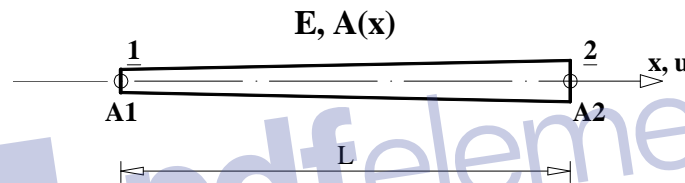
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \int_L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \left\langle \left(1 - \frac{x}{L}\right)a + \frac{x}{L}b \right\rangle dx$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{aL}{3} + \frac{bL}{6} \\ \frac{aL}{6} + \frac{bL}{3} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Exercice 3.1

Une barre de treillis a une section droite d'aire linéairement variable. Considérant cet élément fini comme 1D.

- 1) Proposer un champ de déplacement $u(x)$;
- 2) En déduire la matrice de rigidité $[k]$;
- 3) Etablir le vecteur force F pour une charge de volume axiale bx ;
- 4) Calculer l'état de contrainte et le diagramme de N .



Solution exercice 3.1

$$1) U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \Rightarrow U(x) = \langle 1 \ x \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \text{ ou } U(x) = [G] \{ \alpha \}$$

2) la matrice de rigidité $[k]$:

Par définition la matrice de rigidité $\overline{[K_e]} = \int_{v_e} [B]^T [D][B] dv$ et $[D] = E$ et on calculé $[B]$

$$U|_{x=0} = U_1 ; U|_{x=L} = U_2$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Ou } \{q\} = [A] \{ \alpha \} \Rightarrow \{ \alpha \} = [A]^{-1} \{q\} \text{ et } [A]^{-1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{donc le champ de déplacement devient } U(x) = \langle 1 \ x \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$U(x) = \left\langle \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) \right\rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = N_1 U_1 + N_2 U_2 = [N] \{q\} \quad \text{Avec} \quad N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad ; \quad N_2 = \frac{x}{L}$$

La déformation est égale la dérivé du champ de déplacement, donc:

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial}{\partial x} \{U\} = \frac{\partial}{\partial x} [N] \{q\} = [B] \{q\} \quad \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \quad \text{Donc la}$$

$$\text{matrice de rigidité} \quad [\overline{K}_e] = \int_{v_e} \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dv$$

$$\text{Dans ce cas} \quad \int_{v_e} dv = \int_L A(x) dx \quad \text{donc} \quad [\overline{K}_e] = \int_0^L \left(\frac{A_2 - A_1}{L} x + A_1 \right) \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dx$$

$$[\overline{K}_e] = \frac{E(A_1 + A_2)}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) pour calculé le vecteur de force f pour une charge de volume axiale b_x ;

$$\{f^v\} = \int_v [N]^T (b_x) dv \quad \text{Dans notre cas} \quad \int_{v_e} dv = \int_L A(x) dx \quad \text{donc le vecteur de force nodale}$$

équivalent devient

$$\{f^v\} = \begin{Bmatrix} f_1^v \\ f_2^v \end{Bmatrix} = \int_0^L \left(\frac{A_2 - A_1}{L} x + A_1 \right) \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} (b_x) dx = \frac{b_x L}{6} \begin{bmatrix} 2A_1 + A_2 \\ A_1 + 2A_2 \end{bmatrix}$$

4) pour calculer l'état de contrainte :

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{E(U_2 - U_1)}{L} \quad \text{et} \quad \text{l'effort normale} \quad N(x) = \sigma_x \cdot A(x) \quad \text{donc}$$

$$N(x) = \frac{E(U_2 - U_1)}{L} \cdot \left(\frac{A_2 - A_1}{L} x + A_1 \right)$$

Donc la contrainte est constante et la force normal varie linéairement.

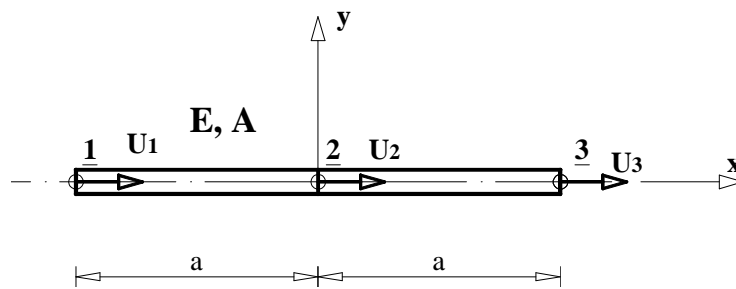
$$\begin{cases} \text{si } x=0 & N(0) = N_1 = \frac{EA_1(U_2 - U_1)}{L} \\ \text{si } x=L & N(L) = N_2 = \frac{EA_2(U_2 - U_1)}{L} \end{cases}$$

Exercice 3.2

Soit une barre de treillis a une section constante. Considérant cet élément fini comme 1D.

1) Proposer un champ de déplacement $u(x)$;

2) En déduire la matrice de rigidité $[k]$;



Solution exercice 3.2

$$1) U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \Rightarrow U(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \text{ ou } U(x) = [G]\{\alpha\}$$

2) la matrice de rigidité $[k]$:

Par définition la matrice de rigidité $[\overline{K}_e] = \int_{v_e} [B]^T [D][B] dv$ et $[D] = E$ et on calculé $[B]$

$$U|_{x=-a} = U_1 ; U|_{x=0} = U_2 ; U|_{x=a} = U_3$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Ou } \{q\} = [A]\{\alpha\} \Rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1}\{q\} \text{ et } [A]^{-1} = \frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} 0 & 2a^2 & 0 \\ -a & 0 & a \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ donc le champ de}$$

$$\text{déplacement devient } U(x) = \left\langle 1 \quad x \quad x^2 \right\rangle \frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} 0 & 2a^2 & 0 \\ -a & 0 & a \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$U(x) = \left\langle \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x}{2a} \quad 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x}{2a} \right\rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = N_1 U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3 = [N] \{q\} \quad \text{Avec}$$

$$N_1 = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x}{2a} \quad ; N_2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad ; N_3 = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x}{2a}$$

La déformation est égale la dérivé du champ de déplacement, donc:

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x} [N] \quad \text{donc } [B] = \begin{bmatrix} \frac{x}{a^2} - \frac{1}{2a} & -\frac{2x}{a^2} & \frac{x}{a^2} + \frac{1}{2a} \end{bmatrix} \quad \text{Donc la matrice de rigidité}$$

$$\overline{[K_e]} = \int_{v_e} \begin{bmatrix} \frac{x}{a^2} - \frac{1}{2a} \\ -\frac{2x}{a^2} \\ \frac{x}{a^2} + \frac{1}{2a} \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} \frac{x}{a^2} - \frac{1}{2a} & -\frac{2x}{a^2} & \frac{x}{a^2} + \frac{1}{2a} \end{bmatrix} dv$$

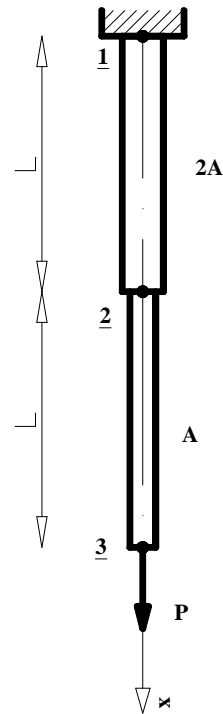
$$\text{Dans ce cas } \int_{v_e} dv = A \int_L dx \quad \text{donc } \overline{[K_e]} = EA \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{x}{a^2} - \frac{1}{2a} \\ -\frac{2x}{a^2} \\ \frac{x}{a^2} + \frac{1}{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{a^2} - \frac{1}{2a} & -\frac{2x}{a^2} & \frac{x}{a^2} + \frac{1}{2a} \end{bmatrix} dx$$

$$\overline{[K_e]} = \frac{EA}{3a} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 2 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 3.3

Soit un système composé par deux barres d'acier comme représentée sur la figure. Le système est encastré en 1, libre en 2 et 3.

- 1) Identifier les inconnues (les déplacements) ;
- 2) Calculer les matrices de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ $[K_{2-3}]$;
- 3) Trouver la matrice de rigidité globale $[K_g]$;
- 4) Trouver le vecteur des déplacements ;
- 5) Tracer le diagramme d'effort normale.



Solution exercice 3.3

- 1) les inconnues sont : $U_1=0$; U_2 ; U_3 .
- 2) les matrices de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ $[K_{2-3}]$;

La matrice de rigidité élémentaire d'élément barre (rigidité axiale seulement)

$$[\overline{K}_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

élé	E	A	L
1-2	E	2A	L
2-3	E	A	L

Donc les matrices élémentaires $[\overline{K}_{1-2}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ $[\overline{K}_{2-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3) la matrice de rigidité globale $[\overline{K}_g] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4) pour trouver le vecteur des déplacements ; $[\overline{K}_g] \{d_g\} = \{F_g\}$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \text{ Après l'élimination des degrés libertés bloques}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad \text{Donc } \{d_g\} = [K_g]^{-1} \{F_g\} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{2EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

5) pour tracer le diagramme d'effort normale, la contrainte dans un barre est égale :

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Donc

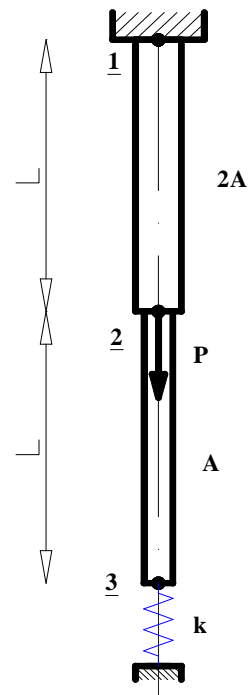
$$\sigma_{1-2} = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{PL}{2EA} \end{Bmatrix} = \frac{P}{2A} (\text{traction}) \quad \text{et} \quad \sigma_{2-3} = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{PL}{2EA} \\ \frac{3PL}{2EA} \end{Bmatrix} = \frac{P}{A} (\text{traction})$$

$$\text{Et } N = \sigma_x \cdot A \quad \text{donc } N_{1-2} = \frac{P}{2A} \cdot 2A = P \quad \text{et} \quad N_{2-3} = \frac{P}{A} \cdot A = P$$

Exercice 3.4

Soit un système composé par deux barres d'acier comme représentée sur la. Le système est encasté en 1, libre en 2 et le nœud 3 relié par un ressort de raideur K.

- 1) Identifier les inconnues (les déplacements) ;
- 2) Calculer les matrices de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ $[K_{2-3}]$;
- 3) Trouver la matrice de rigidité globale $[K_g]$;
- 4) Trouver le vecteur des déplacements ; dans les trois cas :
 - a- avec la présence du ressort
 - b- si enlevé le ressort
 - c- si en remplacé le ressort par un encastrement.
- 5) Tracer le diagramme d'effort normal dans le troisième cas.



Solution exercice 3.4

1) les inconnues sont : $U_1=0$; U_2 ; U_3 .

2) les matrices de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ $[K_{2-3}]$;

Les matrices de rigidité élémentaires sont les mêmes d'exercice précédent

$$\text{Donc } \overline{[K_{1-2}]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \overline{[K_{2-3}]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) la matrice de rigidité globale avec l'absence de ressort $\overline{[K_g]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Si en injectant un ressort de raideur k au nœud 3 la matrice de rigidité globale devient

$$\overline{[K_g]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 + \frac{kL}{EA} \end{bmatrix}$$

4) pour trouver le vecteur des déplacements : $[K_g] \{d_g\} = \{F_g\}$

Dans le premier cas (avec la présence du ressort)

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 + \frac{kL}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Après l'élimination des degrés de liberté bloqués}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 + \frac{kL}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Donc } \{d_g\} = [K_g]^{-1} \{F_g\} \quad \text{et}$$

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{2EA + 3kL} \begin{bmatrix} 1 + \frac{kL}{EA} & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL}{2EA + 3kL} \left(1 + \frac{kL}{EA} \right) \\ \frac{PL}{2EA + 3kL} \end{Bmatrix}$$

Dans le deuxième cas (si enlevé le ressort) : si enlevé le ressort $\Rightarrow k \rightarrow 0$ donc $\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL}{2EA} \\ \frac{PL}{2EA} \end{Bmatrix}$

Dans le troisième cas (si en remplacé le ressort par un encastrement) : si en remplacé le ressort par un encastrement $\Rightarrow k \rightarrow \infty$ donc $\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL}{3EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$

5) pour tracer le diagramme d'effort normale, la contrainte dans un barre est égale :

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Donc

$$\sigma_{1-2} = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{PL}{3EA} \end{Bmatrix} = \frac{P}{3A} (\text{traction}) \quad \text{et} \quad \sigma_{2-3} = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{PL}{3EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{-P}{3A} (\text{compression})$$

$$\text{Et } N = \sigma_x \cdot A \text{ donc } N_{1-2} = \frac{P}{3A} \cdot 2A = \frac{2P}{3} \quad \text{et} \quad N_{2-3} = \frac{-P}{3A} \cdot A = \frac{-P}{3}$$

4. Élément barre de treillis plan

4.1 Rotation des axes (matrice de rotation)

En un nœud 'A' d'une structure, les composantes locales et globales des degrés de liberté sont reliées par la transformation : $\{q_L\} = [R_\alpha]\{q_g\}$ (4.1)

Où $[R_\alpha]$ est une matrice de rotation qui opère le passage des axes globaux aux axes locaux.

Dans le cas de la figure ci-dessous par exemple, on a simplement :

$$\{q_L\} = \begin{Bmatrix} U_L \\ V_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_g \\ V_g \end{Bmatrix} = [R_\alpha]\{q_g\} \quad (4.2)$$

$$\text{D'où } [R_\alpha] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} U_L = U_g \cos \alpha + V_g \sin \alpha \\ V_L = -U_g \sin \alpha + V_g \cos \alpha \end{cases} \quad (4.4)$$

Pour effectuer la rotation sur un élément comportant n_1 ddl au nœud 1 et n_2 au nœud 2, il faut groupés les relations (1.61) de chaque nœud en une seule expression, soit :

$$\{q_L\} = \begin{Bmatrix} q_{1L} \\ q_{2L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\alpha 1} & 0 \\ 0 & R_{\alpha 1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{1g} \\ q_{2g} \end{Bmatrix} = [R]\{q_g\} \quad (4.5)$$

Où $[R]$ est la matrice de rotation de l'élément, d'ordre $n_1 + n_2$.

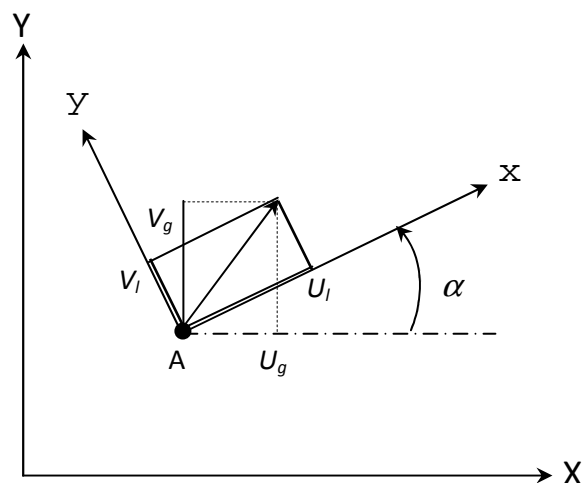


Figure 4.1

Lorsque les D.D.L des nœuds sont de même nombre et de même nature, on a simplement :

$$[R_\alpha] = \begin{bmatrix} R_\alpha & 0 \\ 0 & R_\alpha \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La matrice de rotation de l'élément est carrée, orthogonale, mais non symétrique. $[R]^T = [R]^{-1}$

4.2 Rotation des matrice de rigidité et vecteur forces

Les équations d'équilibre d'un élément sont souvent formulées dans un système d'axe local. Or, on voudrait transformer ces équations pour correspondre certains avantages par rapport au système initial. De plus il n'est pas nécessaire que la transformation se fasse avec un nombre identique de DDL pour chaque système. Donc si les DDL dans le système local sont $\{q_L\}$ et dans le système global $\{q_g\}$.

On peut écrire que :

$$\{q_L\} = [R]\{q_g\} \Rightarrow \langle q_L \rangle = \langle q_g \rangle [R]^T \quad (4.7)$$

$$\{F_L\} = [K_L]\{q_L\} \quad (4.8)$$

Or si $\{F_g\}$ représente le vecteur de forces dans le système global, l'égalité du travail dans les deux systèmes nous donne :

$$\langle q_L \rangle \{F_L\} = \langle q_g \rangle \{F_g\} \quad (4.9)$$

Si l'équation d'équilibre dans le système global s'écrit comme :

$$\{F_g\} = [K_g]\{q_g\} \quad (4.10)$$

On peut par substitution de (4.8) et (4.10) dans (4.9) avoir :

$$\langle q_L \rangle [K_L]\{q_L\} = \langle q_g \rangle [K_g]\{q_g\} \quad (4.11)$$

En remplaçant (4.7) dans (4.11) on obtient :

$$\langle q_g \rangle [R]^T [K_L] [R]\{q_g\} = \langle q_g \rangle [K_g]\{q_g\} \quad (4.12)$$

Par la superposition, on peut tire que :

$$[K_g] = [R]^T [K_L] [R] \quad (4.13)$$

Exemple (élément treillis plan)

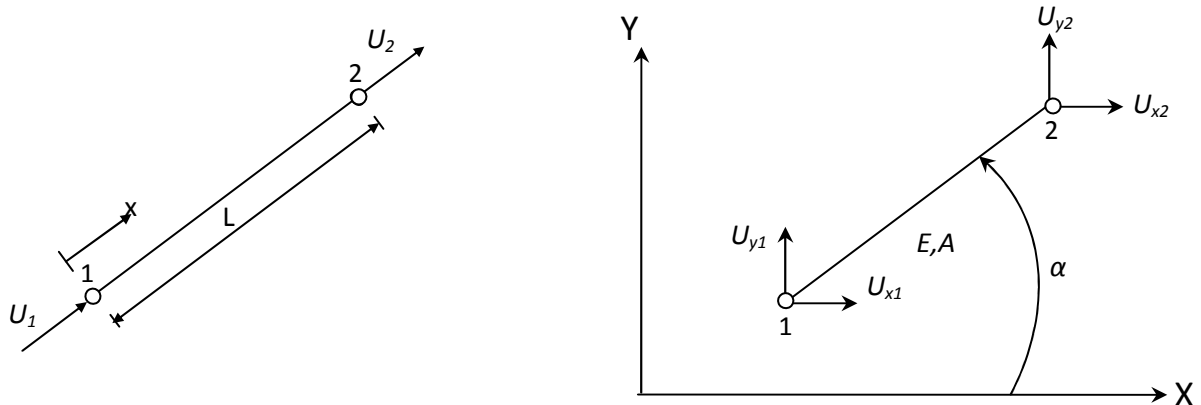


Figure 4.2

$$[K_L] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation du système local (x) au système global (x,y) se fait à l'aide des cosinus directeurs

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Où

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(x, X) = \frac{X_2 - X_1}{L} = \cos \alpha = C \\ a_{12} &= \cos(x, Y) = \frac{Y_2 - Y_1}{L} = \sin \alpha = S \end{aligned} \quad (4.15)$$

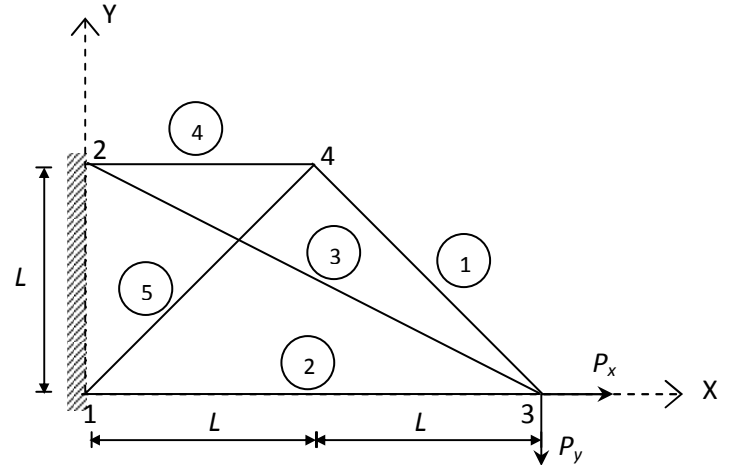
La matrice de rigidité dans le système global devient :

$$[K_g] = [R]^T [K_L] [R] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Exercice 4.1

Soit un système composé par quatre barres d'acier comme représentée sur la. Le système est encasturé en 1 et 2, libre en 3 et le nœud 4.

- 1) Identifier les inconnues (les déplacements) ;
- 2) Calculer les matrices de rigidité élémentaire ;
- 3) Trouver la matrice de rigidité globale $[K_g]$;
- 4) Trouver le vecteur des déplacements ;
- 5) Tracer le diagramme d'effort normal.



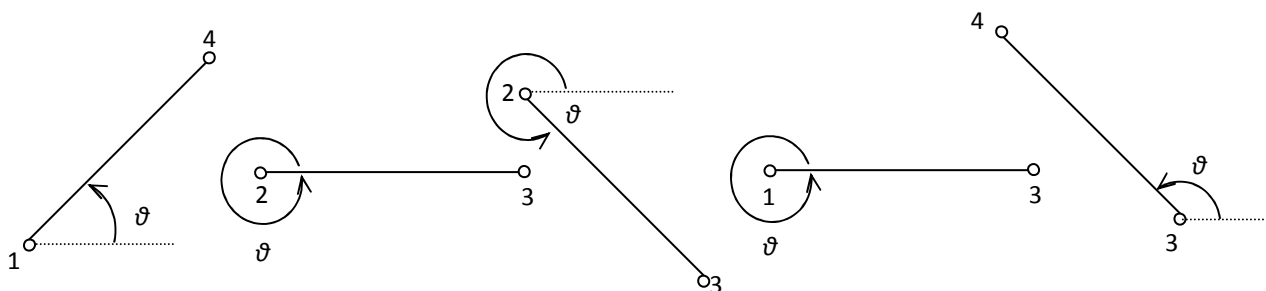
Solution d'exercice 4.1

1) les inconnues sont : $U_1=0$; $V_1=0$; $U_2=0$; $V_2=0$; U_3 ; V_3 ; U_4 ; V_4 .

2) Étudions les barres suivantes :

- ♦ Barre : 3- 4
- ♦ Barre : 1- 3
- ♦ Barre : 2- 3
- ♦ Barre : 2- 4
- ♦ Barre : 1- 4

➤ Détermination les angles et calcul les longueurs :



Barre	Longueur	θ°	C	S	S^2	C^2	CS
3-4	$L\sqrt{2}$	135	-0.7	0.7	0.49	0.49	-0.49
1-3	$2L$	0	1	0	0	1	0
2-3	$L\sqrt{5}$	333.43	0.89	-0.44	0.2	0.8	-0.39
2-4	L	0	1	0	0	1	0
1-4	$L\sqrt{2}$	45	0.7	0.7	0.49	0.49	0.49

➤ Détermination de la matrice élémentaire pour la barre (3-4) :

$$[K_e]^{(3-4)} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.49 & -0.49 & -0.49 & 0.49 \\ -0.49 & 0.49 & 0.49 & -0.49 \\ -0.49 & 0.49 & 0.49 & -0.49 \\ 0.49 & -0.49 & -0.49 & 0.49 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x_3} \\ F_{y_3} \\ F_{x_4} \\ F_{y_4} \end{Bmatrix}$$

➤ Détermine la matrice élémentaire pour la barre (1-4) :

$$[K_e]^{(1-4)} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.49 & 0.49 & -0.49 & -0.49 \\ 0.49 & 0.49 & -0.49 & -0.49 \\ -0.49 & -0.49 & 0.49 & 0.49 \\ -0.49 & -0.49 & 0.49 & 0.49 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_4} \\ F_{y_4} \end{Bmatrix}$$

➤ La matrice élémentaire pour la barre (2-4) :

$$[K_e]^{(2-4)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{x_4} \\ F_{y_4} \end{Bmatrix}$$

➤ La matrice élémentaire pour la barre (1-3) :

$$[K_e]^{(1-3)} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \end{Bmatrix}$$

➤ La matrice élémentaire pour la barre (2- 3) :

$$[K_e]^{(2-3)} = \frac{EA}{L\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.39 & -0.8 & 0.39 \\ -0.39 & 0.2 & 0.39 & -0.2 \\ -0.8 & 0.39 & 0.8 & -0.39 \\ 0.39 & -0.2 & -0.39 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \end{Bmatrix}$$

➤ Écriture les matrices sous forme des équations :

$$[K_e]^{(3-4)} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{x_3} = (0.34U_3 - 0.34V_3 - 0.34U_4 + 0.34V_4) \frac{EA}{L} \\ F_{y_3} = (-0.34U_3 + 0.34V_3 + 0.34U_4 - 0.34V_4) \frac{EA}{L} \\ F_{x_4} = (-0.34U_3 + 0.34V_3 + 0.34U_4 - 0.34V_4) \frac{EA}{L} \\ F_{y_4} = (0.34U_3 - 0.34V_3 - 0.34U_4 + 0.34V_4) \frac{EA}{L} \end{cases}$$

$$[K_e]^{(1-4)} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{x_1} = (0.34U_1 + 0.34V_1 - 0.34U_4 - 0.34V_4) \frac{EA}{L} \\ F_{y_1} = (0.34U_1 + 0.34V_1 - 0.34U_4 - 0.34V_4) \frac{EA}{L} \\ F_{x_4} = (-0.34U_1 - 0.34V_1 + 0.34U_4 + 0.34V_4) \frac{EA}{L} \\ F_{y_4} = (-0.34U_1 - 0.34V_1 + 0.34U_4 + 0.34V_4) \frac{EA}{L} \end{cases}$$

$$[K_e]^{(2-4)} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{x_2} = (U_2 - U_4) \frac{EA}{L} \\ F_{y_2} = (0) \frac{EA}{L} = 0 \\ F_{x_4} = (-U_2 + U_4) \frac{EA}{L} \\ F_{y_4} = (0) \frac{EA}{L} = 0 \end{cases} \quad [K_e]^{(1-3)} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{x_1} = (0.5U_1 - 0.5U_3) \frac{EA}{L} \\ F_{y_1} = (0) \frac{EA}{L} = 0 \\ F_{x_3} = (-0.5U_1 + 0.5U_3) \frac{EA}{L} \\ F_{y_3} = (0) \frac{EA}{L} = 0 \end{cases}$$

$$[K_e]^{(2-3)} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{x_2} = (0.35U_2 - 0.17V_2 - 0.35U_3 + 0.17V_3) \frac{EA}{L} \\ F_{y_2} = (-0.17U_2 + 0.089V_2 + 0.17U_3 - 0.089V_3) \frac{EA}{L} \\ F_{x_3} = (-0.35U_2 + 0.17V_2 + 0.35U_3 - 0.17V_3) \frac{EA}{L} \\ F_{y_3} = (0.17U_2 - 0.089V_2 - 0.17U_3 + 0.089V_3) \frac{EA}{L} \end{cases}$$

3) Après écriture les équations de chaque barre en fait la procédure d'assemblage c'est-à-dire addition les forces dues aux barres et leur intersection dans un seul nœud, on obtient la matrice suivante :

$$[K_G] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.84 & 0.34 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -0.34 & -0.34 \\ 0.34 & 0.34 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.34 & -0.34 \\ 0 & 0 & 1.35 & -0.17 & -0.35 & 0.17 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.17 & 0.089 & 0.174 & -0.089 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.35 & 0.174 & 1.18 & -0.51 & -0.34 & 0.34 \\ 0 & 0 & 0.17 & -0.089 & -0.51 & 0.42 & 0.34 & -0.34 \\ -0.34 & -0.34 & -1 & 0 & -0.34 & 0.34 & 1.7 & 0 \\ -0.34 & -0.34 & 0 & 0 & 0.34 & -0.34 & 0 & 0.68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix}$$

4) Par application des conditions aux limites, la matrice $[K_G]$ devient comme suite :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1.18 & -0.51 & -0.34 & 0.34 \\ -0.51 & 0.42 & 0.34 & -0.34 \\ -0.34 & 0.34 & 1.7 & 0 \\ 0.34 & -0.34 & 0 & 0.68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ -P_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après la résolution, on trouve les déplacements aux nœuds (3) et (4) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{EA}{L} U_3 = 1.84 P_x - 2.74 P_y \\ \frac{EA}{L} V_3 = 2.72 P_x - 9.52 P_y \\ \frac{EA}{L} U_4 = -0.176 P_x + 1.35 P_y \\ \frac{EA}{L} V_4 = 0.44 P_x - 3.39 P_y \end{cases}$$

5) Calcul des contraintes dans les barres :

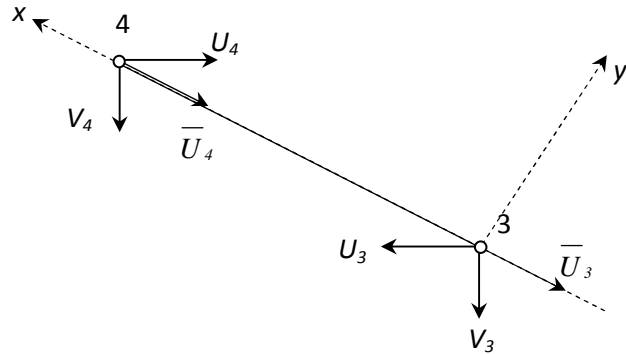
Application numériques $P_x=10$ KN et $P_y=20$ KN

➤ Les contraintes dans l'élément barre sont connues sous la forme:

$$[\sigma_x] = E \begin{bmatrix} -1/L' & 1/L' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix}$$

➤ Calcul des déplacements " \bar{U} " de chaque barre :

• La barre (3 - 4) :



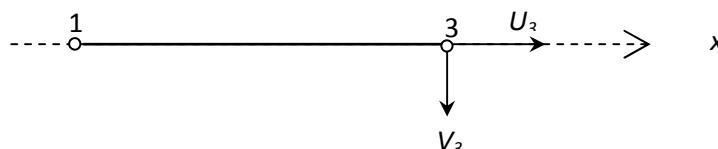
$$\bar{U}_3 = (-U_3 \cos 45 - V_3 \cos 45) \frac{L}{EA}$$

$$\bar{U}_3 = \frac{L\sqrt{2}}{2EA} (-1.84P_x + 2.74P_y - 2.72P_x + 9.52P_y)$$

$$\bar{U}_3 = \frac{L\sqrt{2}}{2EA} (-4.56P_x + 12.26P_y)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_4 &= \frac{L\sqrt{2}}{2EA} (-0.26P_x + 2.04P_y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\sigma_{3-4}] = \frac{\sqrt{2}}{2A} [4.3P_x - 10.22P_y]$$

• La barre (1 - 3) :



$$[\sigma_{1-3}] = \frac{LE}{EA} \begin{bmatrix} -1/L' & 1/L' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{A} [1.84P_x - 2.7P_y]$$

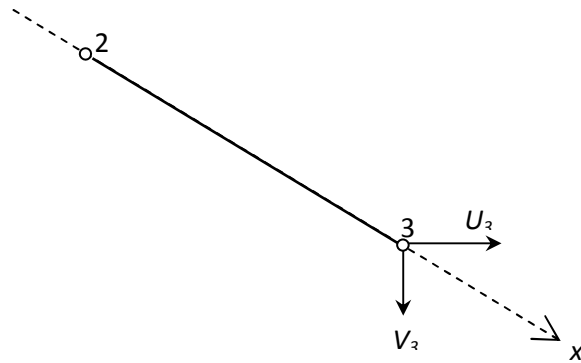
$$\Rightarrow [\sigma_{1-3}] = \frac{1}{A} [1.84P_x - 2.7P_y]$$

- La barre (2 - 3) :

$$\bar{U}_3 = (U_3 \sin 26.56 + V_3 \cos 26.56) \frac{L}{EA}$$

$$\bar{U}_3 = \frac{L}{EA} (2.85P_x - 6.70P_y)$$

$$[\sigma_{3-2}] = \frac{1}{A} [2.8P_x + 0.67P_y]$$



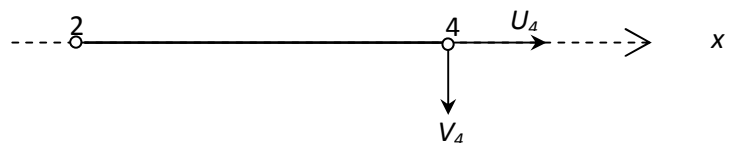
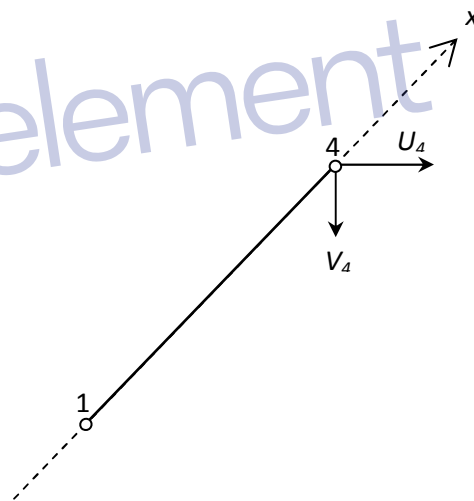
- La barre (1 - 4) :

$$\bar{U}_4 = \frac{L\sqrt{2}}{2EA} (-0.616P_x + 4.74P_y)$$

$$[\sigma_{1-4}] = \frac{\sqrt{2}}{2A} (-0.616P_x + 4.74P_y)$$

- La barre (2 - 4) :

$$[\sigma_{2-4}] = \frac{1}{A} (-0.176P_x + 1.35P_y)$$



Pour : $\begin{cases} P_x = 10\text{KN} \\ P_y = 20\text{KN} \end{cases}$ On obtient le diagramme de contrainte suivant :

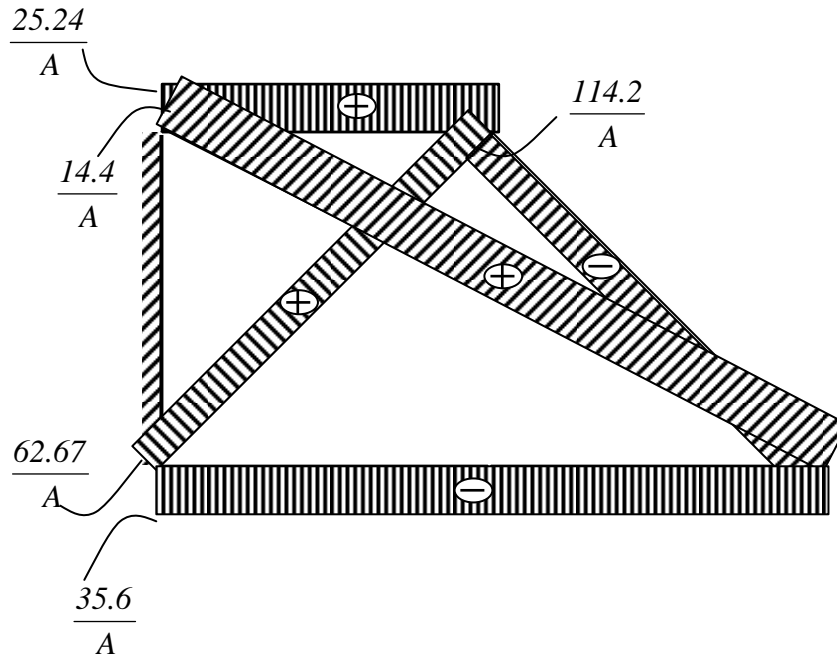
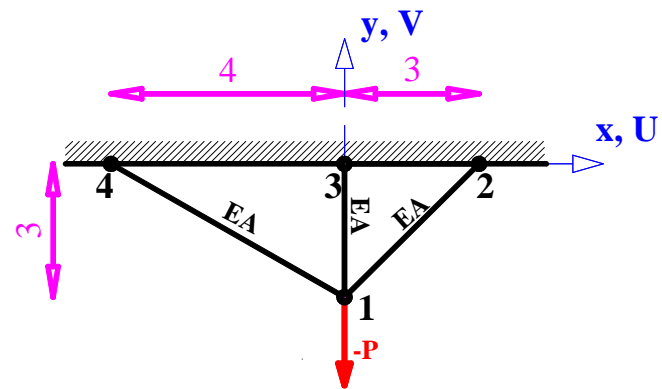


Figure 1.7: Diagramme des contraintes

Exercice 4.2

Le système de treille plan représentée sur la figure représenté ci-dessous est encasté en 2, 3 et 4 et libre en 1. Soit EA le module d'élasticité et la section des barres.

- 1) Identifier les inconnues (des déplacements) ;
- 2) Calculer les matrices de rigidité élémentaire ;
- 3) Trouver la matrice de rigidité globale $[K]_g$;
- 4) Trouver le vecteur des déplacements ;
- 5) Trouver les forces intérieures dans les trois barres.



Solution exercice 4.2

- 1) les inconnues sont : $U_2=V_2= U_3=V_3= U_4=V_4=0$; U_1 ; V_1 .
- 2) les matrices de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ $[K_{1-3}]$ $[K_{1-4}]$;

La matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre dans système bidimensionnel

$$[K_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

élé	L	$\alpha(^{\circ})$	c	s	c^2	s^2	cs
1-2	4,24	45	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5
1-3	3,00	90	0	1	0	1	0
1-4	5	143,13	-0,8	0,6	0,64	0,36	-0,48

Donc les matrices de rigidité élémentaires

$$\overline{[K_{1-2}]} = \frac{EA}{4,24} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,12 & 0,12 & -0,12 & -0,12 \\ 0,12 & 0,12 & -0,12 & -0,12 \\ -0,12 & -0,12 & 0,12 & 0,12 \\ -0,12 & -0,12 & 0,12 & 0,12 \end{bmatrix}$$

$$\overline{[K_{1-3}]} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0 & -0,33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,33 & 0 & 0,33 \end{bmatrix}$$

et

$$\overline{[K_{1-4}]} = \frac{EA}{5} \begin{bmatrix} 0,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 \\ -0,64 & 0,48 & 0,64 & -0,48 \\ 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0,36 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,13 & -0,1 & -0,13 & 0,1 \\ -0,1 & 0,07 & 0,1 & -0,07 \\ -0,13 & 0,1 & 0,13 & -0,1 \\ 0,1 & -0,07 & -0,1 & 0,07 \end{bmatrix}$$

3) la matrice de rigidité globale

$$\overline{[K_g]} = EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0,02 & -0,12 & -0,12 & 0 & 0 & -0,13 & 0,1 \\ & 0,52 & -0,12 & -0,12 & 0 & -0,33 & 0,1 & -0,07 \\ & & 0,12 & 0,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0,33 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0,13 & -0,1 \\ & & & & & & & 0,07 \end{bmatrix}$$

sym

4) pour trouver le vecteur des déplacements : $[K_g] \{d_g\} = \{F_g\}$

$$EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0,02 & -0,12 & -0,12 & 0 & 0 & -0,13 & 0,1 \\ & 0,52 & -0,12 & -0,12 & 0 & -0,33 & 0,1 & -0,07 \\ & & 0,12 & 0,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0,33 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0,13 & -0,1 \\ & & & & & & & 0,07 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Après}$$

l'élimination des degrés libertés bloques

$$EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0,02 \\ 0,02 & 0,52 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix} \quad \text{Donc } \{d_g\} = [K_g]^{-1} \{F_g\} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \frac{P}{EA} \begin{Bmatrix} 0,17 \\ -1,92 \end{Bmatrix}$$

5) pour tracer le diagramme d'effort normale, la contrainte dans un barre est égale :

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L' & L' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{Bmatrix}$$

Élément 1-2

$$U'_1 = (U_1 \cos 45 - V_1 \sin 45) = \frac{\sqrt{2}P}{2EA} (0,17 - 1,92) = -\frac{1,24P}{EA}$$

$$U'_2 = 0$$

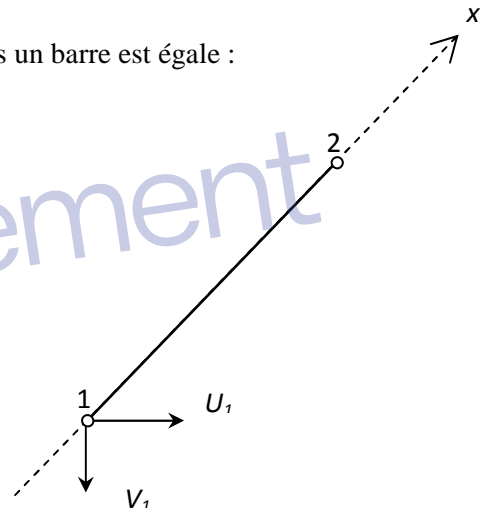
$$\text{Donc } \sigma_x = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4,24 & 4,24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1,24P}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{0,29P}{A} (\text{traction})$$

Élément 1-3

$$U'_1 = (U_1 \cos 90 - V_1 \sin 0) = \frac{P}{EA} (0,0 - 1,92) = -\frac{1,92P}{EA}$$

$$U'_2 = 0$$

$$\text{Donc } \sigma_x = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1,92P}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{0,64P}{A} (\text{traction})$$



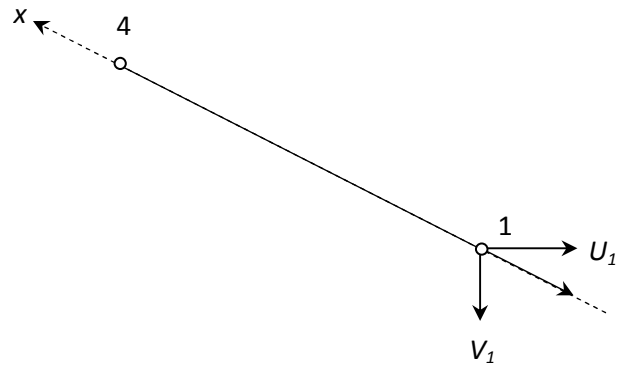
Elément 1-4

$$U_1' = (-U_1 \cos 36,87 - V_1 \cos 53,13) =$$

$$\frac{P}{EA} (-0,17 \cdot 0,8 - 1,92 \cdot 0,6) = -\frac{1,29P}{EA}$$

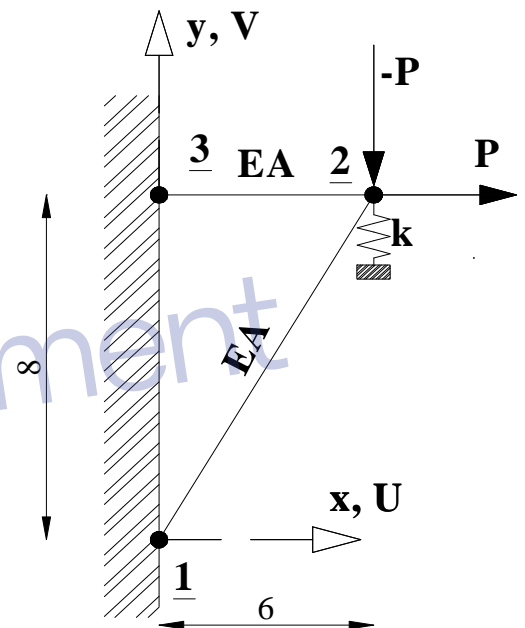
$$U_2' = 0$$

$$\text{Donc } \sigma_x = E \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,29P/EA \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{0,26P}{A} (\text{traction})$$

**Exercice 4.3**

Le système de treille plan représentée sur la (fig -2-) est encastré en 1 et 3 et repose sur un ressort de rigidité k en 2. Soit EA le module d'élasticité et la section des barres.

- 1) Identifier les inconnues (des déplacements) ;
- 2) Calculer les matrices de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ $[K_{2-3}]$;
- 3) Trouver la matrice de rigidité globale $[K_g]$;
- 4) Trouver le vecteur des déplacements ;

**Solution exercice 4.3**

- 1) les inconnues sont : $U_1=V_1=U_3=V_3=0$; $U_2=?$; $V_2=?$.
- 2) les matrices de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ $[K_{2-3}]$;

La matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre dans système bidimensionnel

$$[\overline{K}_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

élé	L	$\alpha(^{\circ})$	c	s	c^2	s^2	cs
1-2	10	53,13	0,6	0,8	0,36	0,64	0,48
2-3	6,00	180	-1	0	1	0	0

Donc les matrices de rigidité élémentaires

$$\overline{[K_{1-2}]} = \frac{EA}{10} \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,036 & 0,048 & -0,036 & -0,048 \\ 0,048 & 0,064 & -0,048 & -0,064 \\ -0,036 & -0,048 & 0,036 & 0,048 \\ -0,048 & -0,064 & 0,048 & 0,064 \end{bmatrix}$$

$$\overline{[K_{2-3}]} = \frac{EA}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,17 & 0 & -0,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,17 & 0 & 0,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) la matrice de rigidité globale

$$\overline{[K_g]} = EA \begin{bmatrix} 0,036 & 0,048 & -0,036 & -0,048 & 0 & 0 \\ & 0,064 & -0,048 & -0,064 & 0 & 0 \\ & & 0,206 & 0,048 & -0,17 & 0 \\ & & & 0,064 + \frac{k}{EA} & 0 & 0 \\ & sym & & & 0,17 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

4) pour trouver le vecteur des déplacements ; $[K_g] \{d_g\} = \{F_g\}$

$$EA \begin{bmatrix} 0,036 & 0,048 & -0,036 & -0,048 & 0 & 0 \\ & 0,064 & -0,048 & -0,064 & 0 & 0 \\ & & 0,206 & 0,048 & -0,17 & 0 \\ & & & 0,064 + \frac{k}{EA} & 0 & 0 \\ & sym & & & 0,17 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Après}$$

l'élimination des degrés libérés bloques

$$EA \begin{bmatrix} 0,206 & 0,048 \\ 0,048 & 0,064 + \frac{k}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix} \quad \text{Donc } \{d_g\} = [K_g]^{-1} \{F_g\} \quad \text{et}$$

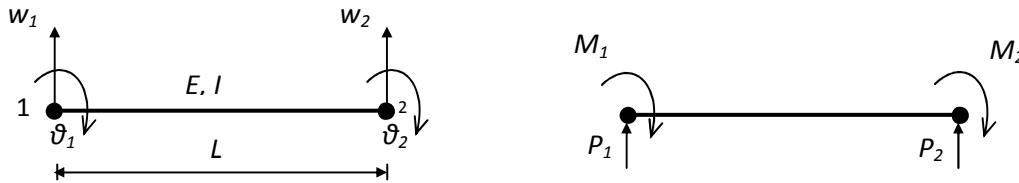
$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{0,233P}{0,053EA + K} \\ \frac{-P}{0,053EA + K} \end{Bmatrix}$$

5. Élément poutre continue (flexion seulement)

5.1 Matrice de rigidité

Cet élément est présenté principalement pour deux raisons :

- introduire les rotations comme D.D.L.
- Montrer une variation des contraintes à l'intérieur de l'élément.



2 DDL/nœud \Rightarrow 4DDL/élément \Rightarrow 4 paramètres indépendants.

Soit:

$$V = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (4.1)$$

$$\theta_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \text{et} \quad \theta_2 = -\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (4.2)$$

$$\begin{Bmatrix} V \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & -1 & -2x & -3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [G] \{ \alpha \} \quad (4.3)$$

Ceci nous donne :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & -1 & -2L & -3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [A] \{ \alpha \} \quad (4.5)$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{q\} \quad \text{avec} \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{-1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{-1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Les fonctions d'interpolations $[N]$ s'obtiennent en substituant (4.6) dans (4.3)

$$\{V\} = [N] \{q\} \quad (4.7)$$

Où :

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) & ; & \quad N_2 = \left(-x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right) \\ N_3 &= \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) & ; & \quad N_4 = \left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

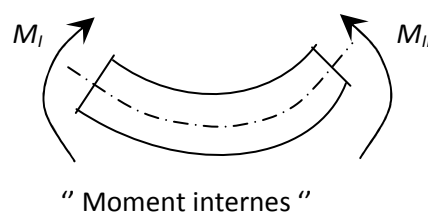
La courbure de l'élément $V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ nous donne

$$V'' = [N''] \{q\} \quad (4.9)$$

Avec :

$$\begin{aligned} N_1'' &= \frac{6}{L^2} \left(\frac{2x}{L} - 1\right) & ; & \quad N_2'' = \frac{2}{L} \left(2 - \frac{3x}{L}\right) \\ N_3'' &= \frac{6}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) & ; & \quad N_4'' = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{3x}{L}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Les moments de flexion internes M_I sont reliés aux courbures par la formule :



$$M_I = E I V'' \quad (4.11)$$

Évaluation de la courbure aux nœuds 1 et 2 :

$$\begin{Bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Cette relation représente la matrice $[B]$ étant donné que les courbures sont reliées aux déformations

$$(\varepsilon_x = -zV'')$$

$$-\frac{1}{z}\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \quad (4.13)$$

Par contre, les moments internes M_{I1} et M_{I2} nous donnent :

$$\begin{Bmatrix} M_{I1} \\ M_{I2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{Bmatrix} = -\frac{I}{z}[E]\{\varepsilon\} \quad (4.14)$$

La seule relation qui nous manque c'est l'évaluation des forces externes aux nœuds en fonction des moments internes. Ces courbures en tout cas sont reliées aux contraintes.

Donc la matrice $[A_0]$ se construit tout simplement par considération élémentaire de l'équilibre.

Tout d'abord, aux nœuds 1 et 2, il est évident que :

$$M_1 = M_{I1} \quad (4.15)$$

$$M_2 = -M_{I2} \quad (4.16)$$

En suite, en considérant l'équilibre de l'élément on trouve :

$$P_1 = -\frac{M_1}{L} - \frac{M_2}{L} = -\frac{M_{I1}}{L} + \frac{M_{I2}}{L} \quad (4.17)$$

$$P_2 = \frac{M_1}{L} + \frac{M_2}{L} = \frac{M_{I1}}{L} - \frac{M_{I2}}{L} \quad (4.18)$$

En combinant (4.15) (4.18) en forme matricielle on trouve :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{I1} \\ M_{I2} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\{F\} = [A_0] \{\sigma\} \quad (4.20)$$

En substituant (4.12) dans (4.14) et (4.14) dans (4.19)

On a :

$$\{F\} = [A_0][E] [B]\{q\} \quad (4.21)$$

Donc:

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4L & 6 & 2L \\ 6 & -2L & -6 & -4L \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$[K_m] = [K_e] \quad (4.24)$$

5.2 Forces généralisées :

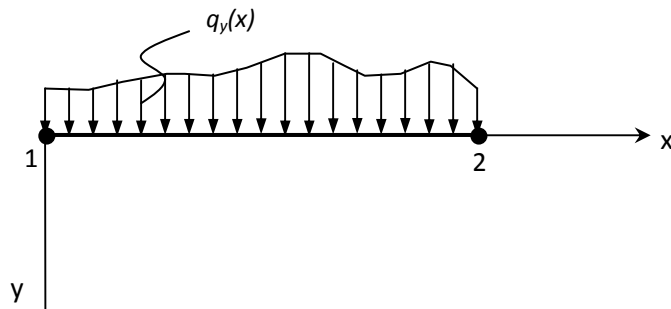
a/- forces de surface :

$$\{F_e^s\} = \int_s [N]^T \{f^s\} ds$$

Si la charge est une densité linéique $q_y(x)$, il vient :

$$\{F_e^s\} = \int_0^L [N]^T \{f^s\} dx$$

Avec $\{f^s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_y(x) \end{Bmatrix}$



D'on l'expression des différents termes :

$$F_{y1} = \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) q_y(x) dx$$

$$M_{z1} = \int_0^L \left(-x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) q_y(x) dx$$

$$F_{y2} = \int_0^L \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) q_y(x) dx$$

$$M_{z2} = \int_0^L \left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) q_y(x) dx$$

$$\{F_e^s\} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

Type de chargement	F_{iy}	M_{iz}	F_{jy}	M_{jz}
	$-\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{PL}{8}$
	$-\frac{Pb^2}{L^3}(2a+L)$	$\frac{Pab^2}{L^2}$	$-\frac{Pb^2}{L^3}(2b+L)$	$-\frac{Pa^2b}{L^2}$
	$-\frac{qL}{2}$	$\frac{qL^2}{12}$	$\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL^2}{12}$
	$-\frac{3qL}{20}$	$\frac{qL^2}{30}$	$\frac{7qL}{20}$	$-\frac{qL^2}{20}$

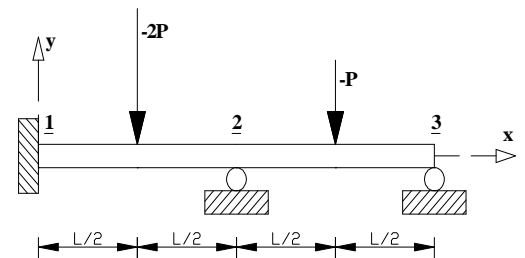
D'une manière générale et dans le cas de forces orientées dans le sens y négatif, le vecteur

charges d'un élément de poutre plane soumis à un système de charges transversales est égal à l'inverse des réactions et moments d'encastrement de la poutre bi-encastree subissant le même chargement. En d'autres termes, ce vecteur traduit les actions nodales équivalentes au chargement appliqué sur la poutre (cf. Tableau 1 des charges nodales équivalentes).

Exercice 5.1

La poutre droite représentée sur la figure est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3. Soit EI_x la rigidité de flexion linéique de la poutre.

- 1) Identifier les inconnues (les déplacements) ;
- 2) Calculer le vecteur de forces nodales équivalentes $\{f_e\}$.
- 3) Calculer la matrice de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ et $[K_{2-3}]$;
- 4) Trouver la matrice de rigidité globale $[K_g]$;
- 5) Trouver le vecteur des déplacements ;



Solution d'exercice 5.1

- 1) les inconnues sont les rotations θ_2 ; θ_3 .
- 2) le vecteur des forces nodales équivalentes $\{f_e\}$.

$$\{F_e^s\} = \int_L [N]^T \{f_e^s\} dx \quad \text{pour element I pour } (\{f_e^s\} = -2P) \Rightarrow \{F_e^s\} = \begin{bmatrix} -P \\ \frac{PL}{4} \\ -P \\ -\frac{PL}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{pour element II pour } (\{f_e^s\} = -P) \Rightarrow \{F_e^s\} = \begin{bmatrix} -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix}$$

- 3) la matrice de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ et $[K_{2-3}]$;

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{donc } [K_{1-2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{et } [K_{2-3}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

4) la matrice de rigidité globale $[K_g]$;

$$[K]_g = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L & 0 & 0 \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & 6L & 24 & 0 & -12 & -6L \\ -6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & 6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & 6L & 12 & 6L \\ 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ pL/4 \\ -3p/2 \\ -pL/8 \\ -p/2 \\ -pL/8 \end{bmatrix}$$

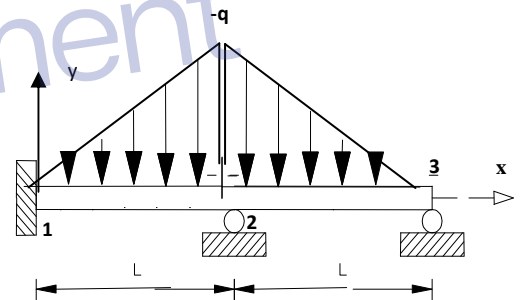
5) le vecteur des déplacements ;

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -pL/8 \\ -pL/8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -pL/8 \\ -pL/8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{112EI} PL^2 \\ -\frac{3}{112EI} PL^2 \end{bmatrix}$$

Exercice 5.2

La poutre droite représentée sur la figure est encadrée en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3. Soit EI_z la rigidité de flexion linéique de la poutre.

- 1) Identifier les inconnues (des déplacements) ;
- 2) Calculer le vecteur de forces nodales équivalentes $\{f_e\}$.
- 3) Calculer la matrice de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ et $[K_{2-3}]$;
- 4) Trouver la matrice de rigidité globale $[K_g]$;
- 5) Trouver le vecteur des déplacements ;



Solution d'exercice 5.2

- 1) les inconnues sont les rotations θ_2 ; θ_3 .
- 2) le vecteur des forces nodales équivalentes $\{f_e\}$.

$$\{F_e^s\} = \int_L [N]^T \{f_e^s\} dx \quad \text{pour element I pour} \quad (\{f_e^s\} = -\frac{q}{L}x) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ -x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \left(-\frac{q}{L}x\right) dx = \begin{bmatrix} -\frac{3}{20}Lq \\ \frac{1}{30}L^2q \\ -\frac{7}{20}Lq \\ -\frac{1}{20}L^2q \end{bmatrix}$$

$$\text{pour element II pour } \{f_e^s\} = \frac{q}{L}x - q \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ -x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \left(\frac{q}{L}x - q\right) dx = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20}Lq \\ \frac{1}{20}L^2q \\ -\frac{3}{20}Lq \\ -\frac{1}{30}L^2q \end{bmatrix}$$

3) la matrice de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$ et $[K_{2-3}]$;

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{donc } [K_{1-2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{et } [K_{2-3}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

4) la matrice de rigidité globale $[K]$;

$$[K]_g = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L & 0 & 0 \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & 6L & 24 & 0 & -12 & -6L \\ -6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & 6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & 6L & 12 & 6L \\ 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{20}Lq \\ \frac{1}{30}L^2q \\ -\frac{7}{10}Lq \\ 0 \\ -\frac{3}{20}Lq \\ -\frac{1}{30}L^2q \end{bmatrix}$$

5) le vecteur des déplacements ;

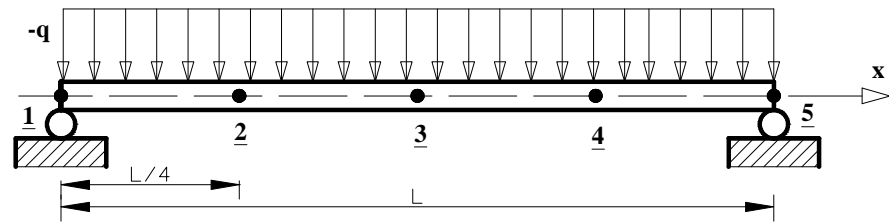
$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{30}L^2q \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{30}L^2q \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{420EI}PL^3 \\ -\frac{1}{105EI}PL^3 \end{bmatrix}$$

Exercice 5.3

Soit la poutre droite représentée sur la figure est reposée sur un appui simple en 1 et 5. Soit EI_z la rigidité de flexion linéique de la poutre.

- 1) Identifier les inconnues (les déplacements) ;
- 2) Calculer les vecteurs des forces nodales équivalentes élémentaires $\{F_e\}_{1-2}$ $\{F_e\}_{2-3}$ $\{F_e\}_{3-4}$ $\{F_e\}_{4-5}$ et déduire le vecteur des forces nodales équivalentes globale $\{F\}_g$;
- 3) Calculer les matrices de rigidité élémentaires $[K]_{1-2}$ $[K]_{2-3}$ $[K]_{3-4}$ $[K]_{4-5}$; et déduire la matrice de rigidité globale $[K]_g$;
- 4) Trouver le vecteur des déplacements nodale $\{d\}_g$;
- 5) Trouver le vecteur des forces intérieures nodale $\{F\}_{int}$.



Solution d'exercice 5.3

1) Les inconnues sont : $v_1=0$; θ_1 ; v_2 ; θ_2 ; v_3 ; θ_3 ; v_4 ; θ_4 ; $v_5=0$; θ_5 .

2) Calcul des vecteurs des forces nodales équivalentes élémentaires $\{F_e\}_{1-2}$ $\{F_e\}_{2-3}$ $\{F_e\}_{3-4}$ $\{F_e\}_{4-5}$;

Nous avons la longueur et la charge extérieure appliqué sur tous les éléments sont constantes, donc $\{F_e\}_{1-2} = \{F_e\}_{2-3} = \{F_e\}_{3-4} = \{F_e\}_{4-5}$

$$\{F\}_{1-2} = \int_0^L \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \\ x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \\ \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \\ \frac{1}{L}x^2 - \frac{1}{L^2}x^3 \end{pmatrix} * q(x) dx \quad \text{La longueur d'élément est égale } L/4 \text{ et la charge}$$

extérieure appliqué sur l'élément est linéairement répartie (-q), donc la formule de calcul des forces nodales équivalentes devient

$$\{F\}_{1-2} = \{F\}_{2-3} = \{F\}_{3-4} = \{F\}_{4-5} = \int_0^{\frac{L}{4}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{\left(\frac{L}{4}\right)^2}x^2 + \frac{2}{\left(\frac{L}{4}\right)^3}x^3 \\ x - \frac{2}{\left(\frac{L}{4}\right)}x^2 + \frac{1}{\left(\frac{L}{4}\right)^2}x^3 \\ \frac{3}{\left(\frac{L}{4}\right)^2}x^2 - \frac{2}{\left(\frac{L}{4}\right)^3}x^3 \\ \frac{1}{\left(\frac{L}{4}\right)}x^2 - \frac{1}{\left(\frac{L}{4}\right)^2}x^3 \end{pmatrix} (-q) dx = \begin{pmatrix} -\frac{qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \\ -\frac{qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur des forces extérieures nodales équivalentes globale $\{F\}_g$;

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \\ F_5 \\ M_5 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}Lq \\ \frac{1}{192}L^2q \\ -\frac{1}{8}Lq \\ -\frac{1}{192}L^2q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{8}Lq \\ \frac{1}{192}L^2q \\ -\frac{1}{8}Lq \\ -\frac{1}{192}L^2q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{8}Lq \\ \frac{1}{192}L^2q \\ -\frac{1}{8}Lq \\ -\frac{1}{192}L^2q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{8}Lq \\ \frac{1}{192}L^2q \\ -\frac{1}{8}Lq \\ -\frac{1}{192}L^2q \end{bmatrix} = \frac{qL}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{48}L \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{48}L \end{bmatrix}$$

3) Calcul des matrices de rigidité élémentaires $[K_e]_{1-2}$ $[K_e]_{2-3}$ $[K_e]_{3-4}$ $[K_e]_{4-5}$.

Nous avons la matrice de rigidité élémentaire d'une poutre continue est égale :

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

La longueur des éléments est égale $L/4$ et la rigidité de flexion linéique EI_z est constante pour les quatre éléments. Donc, les matrices de rigidité élémentaires deviennent :

$$[K_e]_{1-2} = \frac{EI}{\left(\frac{L}{4}\right)^3} \begin{bmatrix} 12 & -6\left(\frac{L}{4}\right) & -12 & -6\left(\frac{L}{4}\right) \\ -6\left(\frac{L}{4}\right) & 4\left(\frac{L}{4}\right)^2 & 6\left(\frac{L}{4}\right) & 2\left(\frac{L}{4}\right)^2 \\ -12 & 6\left(\frac{L}{4}\right) & 12 & 6\left(\frac{L}{4}\right) \\ -6\left(\frac{L}{4}\right) & 2\left(\frac{L}{4}\right)^2 & 6\left(\frac{L}{4}\right) & 4\left(\frac{L}{4}\right)^2 \end{bmatrix} = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & -12L & -96 & -12L \\ -12L & 2L^2 & 12L & L^2 \\ -96 & 12L & 96 & 12L \\ -12L & L^2 & 12L & 2L^2 \end{bmatrix}$$

Et $[K_e]_{1-2} = [K_e]_{2-3} = [K_e]_{3-4} = [K_e]_{4-5}$; Donc la matrice de rigidité globale $[K]_g$;

$$[K]_g = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & -12L & -96 & -12L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12L & 2L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -96 & 12L & 96 & 12L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12L & L^2 & 12L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96 & -12L & -96 & -12L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12L & 2L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & 12L & 96 & 12L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12L & L^2 & 12L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 96 & -12L & -96 & -12L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & 2L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & 12L & 96 & 12L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & L^2 & 12L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 96 & -12L & -96 & -12L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & 2L^2 & 12L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & 12L & 96 & 12L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & L^2 & 12L & 2L^2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & -12L & -96 & -12L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12L & 2L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -96 & 12L & 192 & 0 & -96 & -12L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12L & L^2 & 0 & 4L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & 12L & 192 & 0 & -96 & -12L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12L & L^2 & 0 & 4L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & 12L & 192 & 0 & -96 & -12L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & L^2 & 0 & 4L^2 & 12L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & 12L & 96 & 12L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & L^2 & 12L & 2L^2 \end{bmatrix}$$

4) Calcul du vecteur des déplacements nodale $\{d\}_g$;

$$[K]_g \{d\}_g = \{F\}_g$$

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & -12L & -96 & -12L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12L & 2L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -96 & 12L & 192 & 0 & -96 & -12L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12L & L^2 & 0 & 4L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & 12L & 192 & 0 & -96 & -12L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12L & L^2 & 0 & 4L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & 12L & 192 & 0 & -96 & -12L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & L^2 & 0 & 4L^2 & 12L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & 12L & 96 & 12L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & L^2 & 12L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \frac{qL}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{48}L \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{48}L \end{bmatrix}$$

Après l'élimination des degrés libertés bloques

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12L & 192 & 0 & -96 & -12L & 0 & 0 & 0 \\ L^2 & 0 & 4L^2 & 12L & L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -96 & 12L & 192 & 0 & -96 & -12L & 0 \\ 0 & -12L & L^2 & 0 & 4L^2 & 12L & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -96 & 12L & 192 & 0 & -12L \\ 0 & 0 & 0 & -12L & L^2 & 0 & 4L^2 & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \frac{qL}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{48}L \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{48}L \end{bmatrix}$$

$\{d\}_g = [K]^{-1}_g \{F\}_g$ Donc le vecteur des déplacements nodaux est égale :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \frac{qL^3}{8EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{19}{256}L \\ \frac{11}{48} \\ -\frac{5}{48}L \\ 0 \\ -\frac{19}{256}L \\ -\frac{11}{48} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

5) Calcul du vecteur des forces intérieures nodale $\{F\}_{int}$.

Pour calculé le vecteur des forces intérieures nodale :

$$\begin{bmatrix} T_{I1} \\ M_{I1} \\ T_{I2} \\ M_{I2} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ -F_2 \\ -M_2 \end{bmatrix}$$

Pour l'élément 1-2 : la longueur est égale $L/4$, donc le vecteur des forces intérieures.

$$\begin{bmatrix} T_{I1} \\ M_{I1} \\ T_{I2} \\ M_{I2} \end{bmatrix}_{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} \\ \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{4}{(\frac{L}{4})} & \frac{6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{2}{(\frac{L}{4})} \\ \frac{12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} \\ \frac{6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-2}{(\frac{L}{4})} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-4}{(\frac{L}{4})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL^3}{24EI} \\ -\frac{19qL^4}{2048EI} \\ \frac{11qL^3}{384EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \\ \frac{3qL}{8} \\ \frac{19qL^2}{192} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \\ \frac{qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ 0 \\ \frac{qL}{4} \\ \frac{3qL^2}{32} \end{bmatrix}$$

Pour l'élément 2-3

$$\begin{bmatrix} T_{I2} \\ M_{I2} \\ T_{I3} \\ M_{I3} \end{bmatrix}_{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} \\ \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{4}{(\frac{L}{4})} & \frac{6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{2}{(\frac{L}{4})} \\ \frac{12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} \\ \frac{6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-2}{(\frac{L}{4})} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-4}{(\frac{L}{4})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{19qL^4}{2048EI} \\ \frac{11qL^3}{384EI} \\ -\frac{5qL^4}{384EI} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{8} \\ \frac{19qL^2}{192} \\ \frac{qL}{8} \\ \frac{25qL^2}{192} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \\ \frac{qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{4} \\ \frac{3qL^2}{32} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} \end{bmatrix}$$

Pour l'élément 3-4

$$\begin{bmatrix} T_{I3} \\ M_{I3} \\ T_{I4} \\ M_{I4} \end{bmatrix}_{3-4} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} \\ \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{4}{(\frac{L}{4})} & \frac{6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{2}{(\frac{L}{4})} \\ \frac{12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} \\ \frac{6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-2}{(\frac{L}{4})} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-4}{(\frac{L}{4})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5qL^4}{384EI} \\ 0 \\ -\frac{19qL^4}{2048EI} \\ \frac{11qL^3}{384EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-qL}{8} \\ \frac{25qL^2}{192} \\ \frac{-qL}{8} \\ \frac{19qL^2}{192} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \\ \frac{qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL^2}{8} \\ -\frac{qL}{4} \\ \frac{3qL^2}{32} \end{bmatrix}$$

Pour l'élément 4-5

$$\begin{bmatrix} T_{I4} \\ M_{I4} \\ T_{I5} \\ M_{I5} \end{bmatrix}_{4-5} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} \\ \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{4}{(\frac{L}{4})} & \frac{6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{2}{(\frac{L}{4})} \\ \frac{12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-12}{(\frac{L}{4})^3} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} \\ \frac{6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-2}{(\frac{L}{4})} & \frac{-6}{(\frac{L}{4})^2} & \frac{-4}{(\frac{L}{4})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{19qL^4}{2048EI} \\ -\frac{11qL^3}{384EI} \\ 0 \\ -\frac{qL^3}{24EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3qL}{8} \\ \frac{19qL^2}{192} \\ \frac{-3qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \\ \frac{qL}{8} \\ \frac{qL^2}{192} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-qL}{4} \\ \frac{3qL^2}{32} \\ -\frac{qL}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

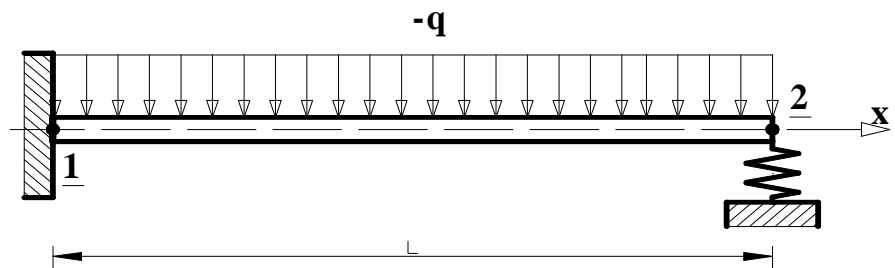
Donc le tableau suivant récapitulé le moment fléchissant et l'effort tranchant sur le long de la poutre :

$$\begin{bmatrix} x = & 0 & \frac{L}{4} & \frac{L}{2} & \frac{3L}{4} & L \\ T = & \frac{qL}{2} & \frac{qL}{4} & 0 & \frac{-qL}{4} & \frac{-qL}{2} \\ M_f = & 0 & \frac{3qL^2}{32} & \frac{qL^2}{8} & \frac{3qL^2}{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 5.4

Soit la poutre droite représentée sur figure ci-dessous est encasté en 1 et le nœud 3 relié par un ressort de raideur K . Soit EI_z la rigidité de flexion linéique de la poutre.

- 1) Identifier les inconnues (les déplacements) ;
- 2) Calculer les vecteurs des forces nodales équivalentes élémentaires $\{F_e\}_{1-2}$ et déduire le vecteur des forces nodales équivalentes globale $\{F\}_g$;
- 3) Calculer les matrices de rigidité élémentaires $[K]_{1-2}$; et déduire la matrice de rigidité globale $[K]_g$;



- 4) Trouver le vecteur des déplacements nodale $\{d\}_g$; dans les trois cas :
 - a- avec la présence du ressort
 - b- si enlevé le ressort
 - c- si en remplacé le ressort par un encastrement.
- 5) Trouver le vecteur des forces intérieures nodales dans le deuxième cas.

Solution d'exercice 5.4

- 1) les inconnues sont les rotations v_2 ; θ_2 .
- 2) le vecteur des forces nodales équivalentes $\{f_e\}$.

$$\{F_e^s\} = \int_L [N]^T \{f_e^s\} dx \quad \text{pour element } I \quad \text{pour} \quad (\{f_e^s\} = -q) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ -x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} (-p) dx = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{12}L^2q \\ -\frac{1}{2}Lq \\ -\frac{1}{12}L^2q \end{bmatrix}$$

Il y a un seule élément, donc

$$\{F_g^s\} = \{F_e^s\}$$

3) la matrice de rigidité élémentaire $[K_{1-2}]$;

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{donc donc } [K_{1-2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & -24L & -96 & -24L \\ -24L & 8L^2 & 24L & 4L^2 \\ -96 & 24L & 96 & 24L \\ -24L & 4L^2 & 24L & 8L^2 \end{bmatrix} = [K_g]$$

4) le vecteur des déplacements ;

a- avec la présence du ressort ;

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 + \frac{kL^3}{EI} & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{12}L^2q \\ -\frac{1}{2}Lq \\ -\frac{1}{12}L^2q \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{kL^3}{EI} & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Lq \\ -\frac{1}{12}L^2q \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3qL^4}{8(kL^3+3EI)} \\ \frac{qL^3}{2kL^3+6EI} \left[1 - \frac{kL^3}{24EI} \right] \end{bmatrix}$$

b- si enlevé le ressort $\Rightarrow k \rightarrow 0$ donc

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^4}{8EI} \\ \frac{qL^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

c- si en remplacé le ressort par un encastrement $\Rightarrow k \rightarrow \infty$ donc

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^3}{48EI} \end{bmatrix}$$

5) Calcul du vecteur des forces intérieures nodale $\{F\}_{int}$.

Pour calculé le vecteur des forces intérieures nodale :

$$\begin{bmatrix} T_{I1} \\ M_{I1} \\ T_{I2} \\ M_{I2} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ -F_2 \\ -M_2 \end{bmatrix}$$

Donc

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL^4}{8EI} \\ \frac{qL^3}{6EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}Lq \\ -\frac{5}{12}L^2q \\ \frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{12}L^2q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{12}L^2q \\ \frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{12}L^2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qL \\ -\frac{1}{2}qL^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

 pdfelement

6. Élément cadre plan (poutre de Bernoulli)

6.1 Matrice de rigidité

On examine le problème plan d'une poutre prismatique ($EA=cte$; $EI=cte$) combinant le comportement axial à celui flexionnel. La référence géométrique est l'axe de la poutre.

Deux modes énergétiques :

- axial
- flexionnel

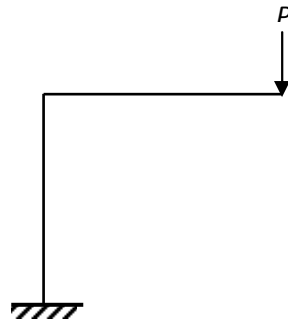
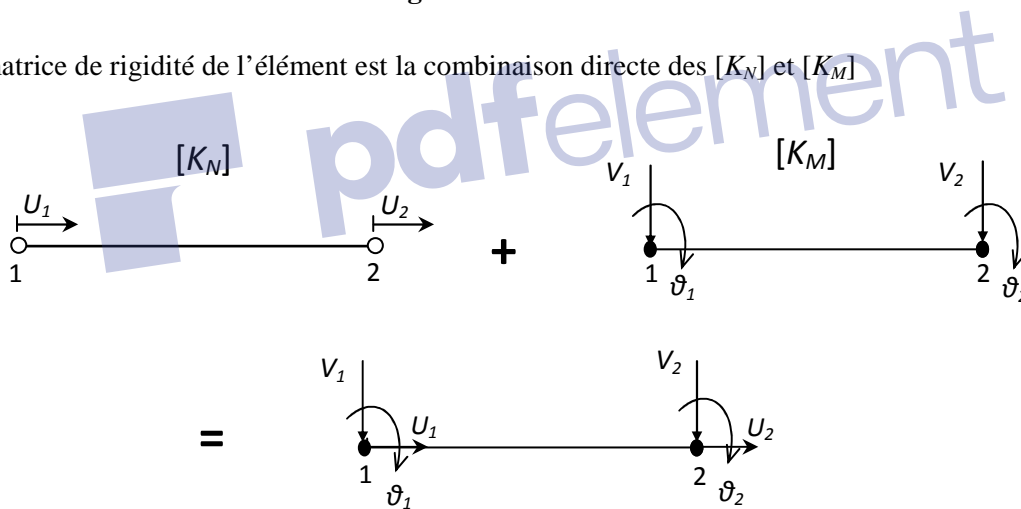


Figure 6.1

La matrice de rigidité de l'élément est la combinaison directe des $[K_N]$ et $[K_M]$



$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow \text{Superposition découplée } \overline{[K_N]} \text{ n'influe pas sur } \overline{[K_M]}$$

6.2 Rotation des axes (matrice de rotation)

En un nœud 'A' d'une structure, les composantes locales et globales des degrés de liberté sont reliées par la transformation :

$$\{q_L\} = [R_\alpha] \{q_g\} \quad (6.1)$$

Où $[R_\alpha]$ est une matrice de rotation qui opère le passage des axes globaux aux axes locaux.

Dans le cas de la figure ci-dessous par exemple, on a simplement :

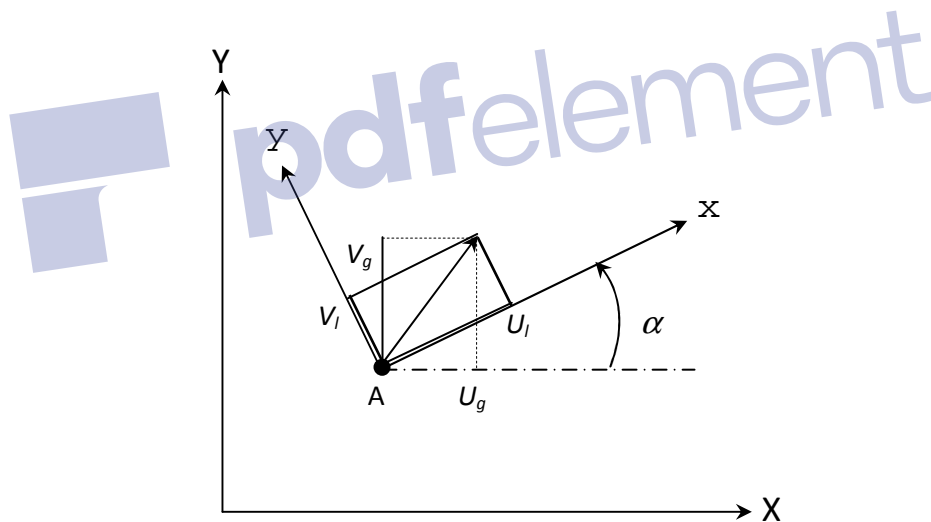


Figure 6.2

$$\{q_L\} = \begin{Bmatrix} U_L \\ V_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_g \\ V_g \end{Bmatrix} = [R_\alpha] \{q_g\} \quad (6.2)$$

D'où

$$[R_\alpha] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} U_L = U_g \cos \alpha + V_g \sin \alpha \\ V_L = -U_g \sin \alpha + V_g \cos \alpha \end{cases} \quad (6.4)$$

Pour effectuer la rotation sur un élément comportant n_1 ddl au nœud 1 et n_2 au nœud 2, il faut groupés les relations (1.61) de chaque nœud en une seule expression, soit :

$$\{q_L\} = \begin{Bmatrix} q_{1L} \\ q_{2L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\alpha 1} & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & R_{\alpha 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{1g} \\ q_{2g} \end{Bmatrix} = [R] \{q_g\} \quad (6.5)$$

Où $[R]$ est la matrice de rotation de l'élément, d'ordre $n_1 + n_2$.

Lorsque les D.D.L des nœuds sont de même nombre et de même nature, on a simplement :

$$[R_\alpha] = \begin{bmatrix} R_\alpha & 0 \\ 0 & R_\alpha \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

La matrice de rotation de l'élément est carrée, orthogonale, mais non symétrique. $[R]^T = [R]^{-1}$

6.3 Rotation des matrice de rigidité et vecteur forces

Les équations d'équilibre d'un élément sont souvent formulées dans un système d'axe local. Or, on voudrait transformer ces équations pour correspondre certains avantages par rapport au système initial. De plus il n'est pas nécessaire que la transformation se fasse avec un nombre identique de ddl pour chaque système. Donc si les ddl dans le système local sont $\{P_l\}$ et dans le système global $\{P_g\}$.

On peut écrire que :

$$\{q_L\} = [R] \{q_g\} \quad (6.7)$$

$$\{F_L\} = [K_L] \{q_L\} \quad (6.8)$$

Or si $\{F_g\}$ représente le vecteur de forces dans le système global, l'égalité du travail dans les deux systèmes nous donne :

$$\langle q_L \rangle \{F_L\} = \langle q_g \rangle \{F_g\} \quad (6.9)$$

Si l'équation d'équilibre dans le système global s'écrit comme :

$$\{F_g\} = [K_g] \{q_g\} \quad (6.10)$$

On peut par substitution de (6.10) et (6.8) dans (6.9) avoir :

$$\langle q_L \rangle [K_L] \{q_L\} = \langle q_g \rangle [K_g] \{q_g\} \quad (6.11)$$

En remplaçant (6.1) dans (6.11) on obtient :

$$\langle q_g \rangle [R]^T [K_L] [R] \{q_g\} = \langle q_g \rangle [K_g] \{q_g\} \quad (6.12)$$

D'où l'on tire que :

$$[K_g] = [R]^T [K_L] [R] \quad (6.13)$$

Exemple

➤ Pour le cas d'un élément de cadre plan :

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad R_1 = R_2 = \begin{bmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

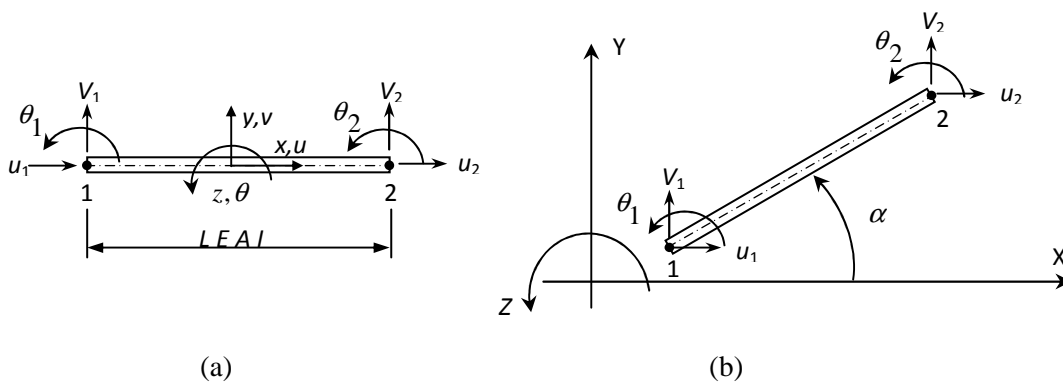


Figure 6.3

Donc

$$[R] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

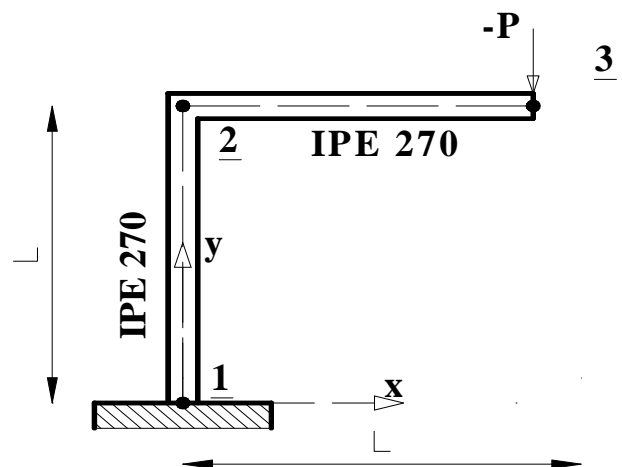
La matrice de rigidité élémentaire au repaire globale $[K_{eg}] = [R]^T [K_L] [R]$

$$[k_{eg}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} c^2 + \frac{12EI}{L^3} s^2 & \frac{EA}{L} cs - \frac{12EI}{L^3} cs & \frac{6EI}{L^2} s & -\frac{EA}{L} c^2 - \frac{12EI}{L^3} s^2 & \frac{12EI}{L^3} cs - \frac{EA}{L} cs & \frac{6EI}{L^2} s \\ \frac{EA}{L} cs - \frac{12EI}{L^3} cs & \frac{EA}{L} s^2 + \frac{12EI}{L^3} c^2 & -\frac{6EI}{L^2} c & \frac{12EI}{L^3} cs - \frac{EA}{L} cs & -\frac{EA}{L} s^2 - \frac{12EI}{L^3} c^2 & -\frac{6EI}{L^2} c \\ \frac{6EI}{L^2} s & -\frac{6EI}{L^2} c & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} s & \frac{6EI}{L^2} c & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} c^2 - \frac{12EI}{L^3} s^2 & \frac{12EI}{L^3} cs - \frac{EA}{L} cs & -\frac{6EI}{L^2} s & \frac{EA}{L} c^2 + \frac{12EI}{L^3} s^2 & \frac{EA}{L} cs - \frac{12EI}{L^3} cs & -\frac{6EI}{L^2} s \\ \frac{12EI}{L^3} cs - \frac{EA}{L} cs & -\frac{EA}{L} s^2 - \frac{12EI}{L^3} c^2 & \frac{6EI}{L^2} c & \frac{EA}{L} cs - \frac{12EI}{L^3} cs & \frac{EA}{L} s^2 + \frac{12EI}{L^3} c^2 & \frac{6EI}{L^2} c \\ \frac{6EI}{L^2} s & -\frac{6EI}{L^2} c & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} s & \frac{6EI}{L^2} c & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Exercice 6.1

Soit la structure suivante formée de deux éléments poutres élancées et trois nœuds. Le chargement consiste en une charge concentrée $-P$ appliquée au nœud 3. Sachant que l'appui au nœud 1 est encastré. Soit EIz la rigidité de flexion linéique de tous les poutres.

- 1) Identifier les inconnues (les déplacements) ;
- 2) Dédire le vecteur des forces nodales équivalentes globale $\{F\}_g$;
- 3) Calculer les matrices de rigidité élémentaires $[K]_{1-2}$ $[K]_{2-3}$; et déduire la matrice de rigidité globale $[K]_g$;
- 4) Trouver le vecteur des déplacements nodale $\{d\}_g$;
- 5) Trouver le vecteur des forces intérieures nodales.



Application numérique: $L=10$ m, $q= 10$ kN/m, $E=2.1 \cdot 10^8$ kN/m².

Solution d'exercice 6.1

1) les inconnues sont les rotations $u_1 = v_1 = \theta_1 = 0; u_2; v_2; \theta_2; u_3 = v_3 = \theta_3 = 0$.

3) le vecteur des forces nodales équivalentes $\{f_e\}$.

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) Calcul des matrices de rigidité élémentaires $[K_e]_{1-2}$ $[K_e]_{2-3}$.

Nous avons la matrice de rigidité élémentaire d'une poutre continue est égale :

$$[k_{eg}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{6EI}{L^2}s - \frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{12EI}{L^3}cs - \frac{EA}{L}cs & \frac{6EI}{L^2}s \\ \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{12EI}{L^3}cs - \frac{EA}{L}cs & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 & -\frac{6EI}{L^2}c \\ \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{12EI}{L^3}cs - \frac{EA}{L}cs & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & -\frac{6EI}{L^2}s \\ \frac{12EI}{L^3}cs - \frac{EA}{L}cs & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c \\ \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

La longueur des éléments est égale L et la rigidité de flexion linéique EI_z est constante pour les trois éléments.

élé	L	$\alpha(^{\circ})$	c	s
1-2	L	90	0	1
2-3	L	0	1	0

Donc, les matrices de rigidité élémentaires deviennent :

$$[k_{1-2}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$[k_{2-3}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice de rigidité globale $[K]_g$;

$$[k_g] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

4) Calcul du vecteur des déplacements nodale $\{d\}_g$;

$$[K]_g \{d\}_g = \{F\}_g$$

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après l'élimination des degrés libertés bloques,

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{PL^3}{2EI} \\ -\frac{PL}{EA} \\ \frac{PL^2}{EI} \\ \frac{PL^3}{2EI} \\ -PL \left(\frac{4L^2}{3EI} + \frac{1}{EA} \right) \\ \frac{3PL^2}{2EI} \end{bmatrix}$$

Pour calculé le vecteur des forces intérieures nodale $\{f_{int}\}$:

$$\{f_{int}\} = [K_L] \{d_e\} - \{f_{int}\}$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ T_{11} \\ M_{11} \\ -N_{12} \\ -T_{12} \\ -M_{12} \end{bmatrix} = [k_1] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix}$$

Toutes les éléments ont les mêmes longueurs, sections, inerties et module d'élasticité, donc le vecteur des forces intérieures.

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ N_{11} \\ M_{11} \\ -T_{12} \\ -N_{12} \\ -M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{PL^3}{2EI} \\ -\frac{PL}{EA} \\ \frac{PL^2}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ -LP \\ 0 \\ -P \\ LP \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ -LP \\ 0 \\ -P \\ LP \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ N_{11} \\ M_{11} \\ T_{12} \\ N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ -PL \\ 0 \\ P \\ -PL \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \\ -N_{13} \\ -T_{13} \\ -M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{PL^3}{2EI} \\ -\frac{PL}{EA} \\ \frac{PL^2}{EI} \\ \frac{PL^3}{2EI} \\ -\frac{4PL^3}{3EI} - \frac{PL}{EA} \\ \frac{3PL^2}{2EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ PL \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \\ N_{13} \\ T_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ PL \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

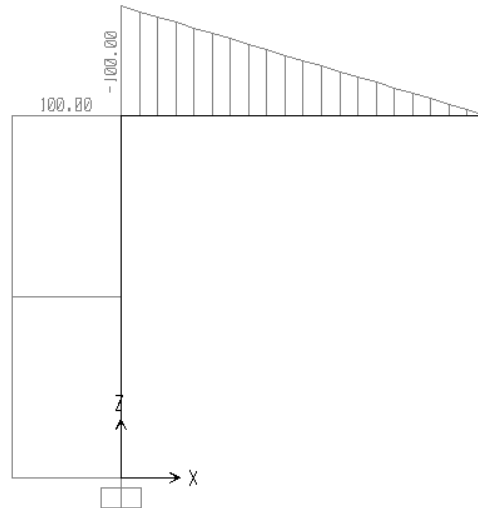


Diagramme du moment fléchissant (SAP 2000).

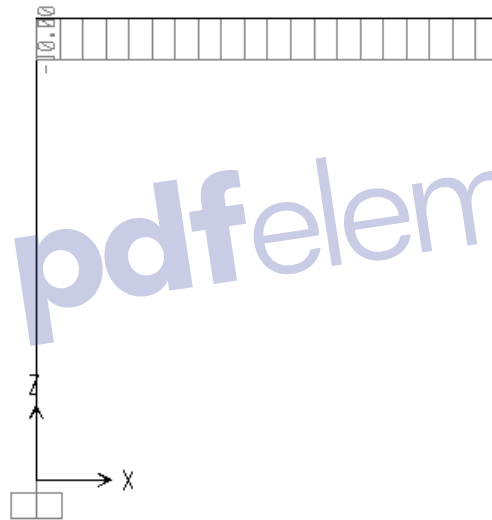


Diagramme de l'effort tranchant (SAP 2000).

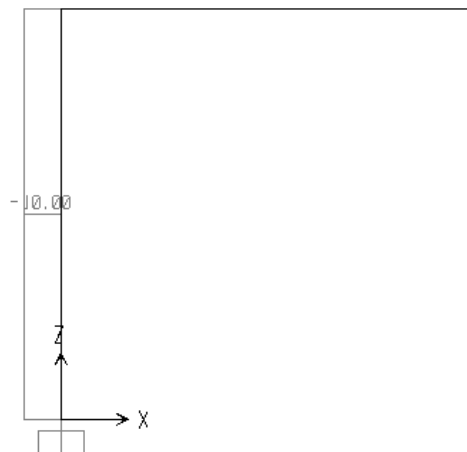


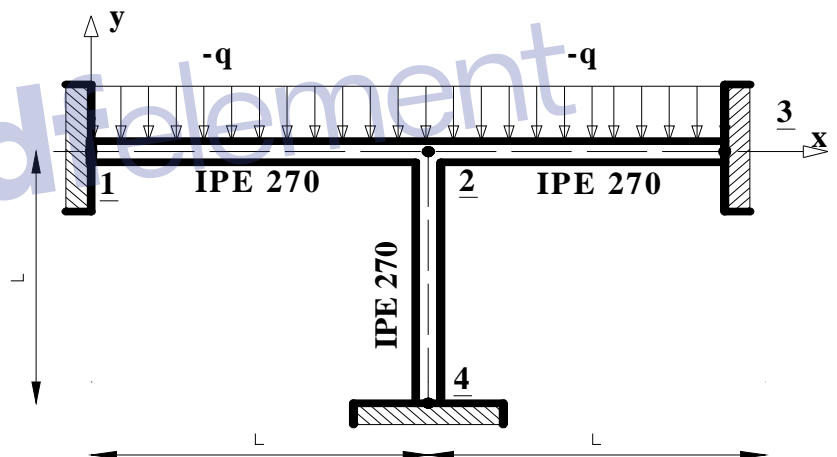
Diagramme de l'effort normal (SAP 2000).

Exercice 6.2

Soit la structure suivante formée de trois éléments poutres élancées et quatre nœuds. Le chargement consiste en une charge répartie verticale q appliquée aux éléments 1 et 2. Sachant que les appuis aux nœuds 1, 3 et 4 sont tous encastrés. Soit EI_z la rigidité de flexion linéique de tous les poutres.

- 1) Identifier les inconnues (les déplacements) ;
- 2) Calculer les vecteurs des forces nodales équivalentes élémentaires $\{F_e\}_{1-2}$ $\{F_e\}_{2-3}$ et déduire le vecteur des forces nodales équivalentes globale $\{F\}_g$;
- 3) Calculer les matrices de rigidité élémentaires $[K]_{1-2}$ $[K]_{2-3}$ $[K]_{2-4}$; et déduire la matrice de rigidité globale $[K]_g$;
- 4) Trouver le vecteur des déplacements nodale $\{d\}_g$;
- 5) Trouver le vecteur des forces intérieures nodales.

Application numérique: $L=10$ m,
 $q=10$ kN/m, $E=2.1 \cdot 10^8$ kN/m².



Solution d'exercice 6.2

- 1) les inconnues sont les rotations $u_1 = v_1 = \theta_1 = 0$; u_2 ; v_2 ; θ_2 ; $u_3 = v_3 = \theta_3 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$.
- 2) le vecteur des forces nodales équivalentes $\{f_e\}$.

$$\{F_e^s\} = \int_L [N]^T \{f_e^s\} dx \quad \text{pour element I pour} \quad \left(\{f_e^s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1Z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2Z} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ 0 & -x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ 0 & \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -q \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{pour element II pour} \quad \{f_e^s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2Z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3Z} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ 0 & -x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ 0 & \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -q \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{pour element III pour} \quad \{f_e^s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2Z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4Z} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} 0 & 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ 1 - \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & -x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ 0 & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -q \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc le vecteur des forces extérieures nodales équivalentes globale $\{F\}_g$;

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -qL \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) Calcul des matrices de rigidité élémentaires $[K_e]_{1-2}$ $[K_e]_{2-3}$ $[K_e]_{2-4}$.

Nous avons la matrice de rigidité élémentaire d'une poutre continue est égale :

$$[k_{eg}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{12EI}{L^3}cs - \frac{EA}{L}cs & \frac{6EI}{L^2}s \\ \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{12EI}{L^3}cs - \frac{EA}{L}cs & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 & -\frac{6EI}{L^2}c \\ \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{12EI}{L^3}cs - \frac{EA}{L}cs & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & -\frac{6EI}{L^2}s \\ \frac{12EI}{L^3}cs - \frac{EA}{L}cs & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c \\ \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

La longueur des éléments est égale L et la rigidité de flexion linéique EI_z est constante pour les trois éléments.

élé	L	$\alpha(^{\circ})$	c	s
1-2	L	0	1	0
2-3	L	0	1	0
2-4	L	270	0	-1

Donc, les matrices de rigidité élémentaires deviennent :

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 2\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\
 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{24EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\
 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L}
 \end{bmatrix}$$

4) Calcul du vecteur des déplacements nodale {d}_g ;

[K]_g {d}_g = {F}_g

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 2\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\
 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{24EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\
 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L}
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -qL \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après l'élimination des degrés libertés bloques,

$$\begin{bmatrix}
 2\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\
 0 & \frac{EA}{L} + \frac{24EI}{L^3} & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L}
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -qL \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{\frac{EA}{L} + \frac{24EI}{L^3}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour calculé le vecteur des forces intérieures nodale {f_{int}} :

{f_{int}} = [K_L]{d_e} - {f_{int}}

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ T_{11} \\ M_{11} \\ -N_{12} \\ -T_{12} \\ -M_{12} \end{bmatrix} = [k_l] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix}$$

Toutes les éléments ont les mêmes longueurs, sections, inerties et module d'élasticité, donc le vecteur des forces intérieures.

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ T_{11} \\ M_{11} \\ -N_{12} \\ -T_{12} \\ -M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{\frac{AE}{L} + \frac{24EI}{L^3}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{12}{L^2}q \frac{EI}{\frac{EA}{L} + \frac{24}{L^3}EI} \\ -\frac{6}{L}q \frac{EI}{\frac{EA}{L} + \frac{24}{L^3}EI} \\ 0 \\ -\frac{12}{L^2}q \frac{EI}{\frac{EA}{L} + \frac{24}{L^3}EI} \\ -\frac{6}{L}q \frac{EI}{\frac{EA}{L} + \frac{24}{L^3}EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ T_{11} \\ M_{11} \\ N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50.151 \\ -84.088 \\ 0 \\ -49.849 \\ -82.579 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \\ -N_{13} \\ -T_{13} \\ -M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{12}{L^2}q \frac{EI}{\frac{EA}{L} + \frac{24}{L^3}EI} \\ \frac{6}{L}q \frac{EI}{\frac{EA}{L} + \frac{24}{L^3}EI} \\ 0 \\ \frac{12}{L^2}q \frac{EI}{\frac{EA}{L} + \frac{24}{L^3}EI} \\ \frac{6}{L}q \frac{EI}{\frac{EA}{L} + \frac{24}{L^3}EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \\ N_{13} \\ T_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 49.849 \\ -82.579 \\ 0 \\ -50.151 \\ -84.088 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{I2} \\ N_{I2} \\ M_{I2} \\ -T_{I4} \\ -N_{I4} \\ -M_{I4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{\frac{AE}{L} + \frac{24EI}{L^3}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q \frac{EA}{L + \frac{24}{L^3}EI} \\ 0 \\ 0 \\ q \frac{EA}{L + \frac{24}{L^3}EI} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{bmatrix} T_{I2} \\ N_{I2} \\ M_{I2} \\ T_{I4} \\ N_{I4} \\ M_{I4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -99.997 \\ 0 \\ 0 \\ -99.997 \\ 0 \end{bmatrix}$$

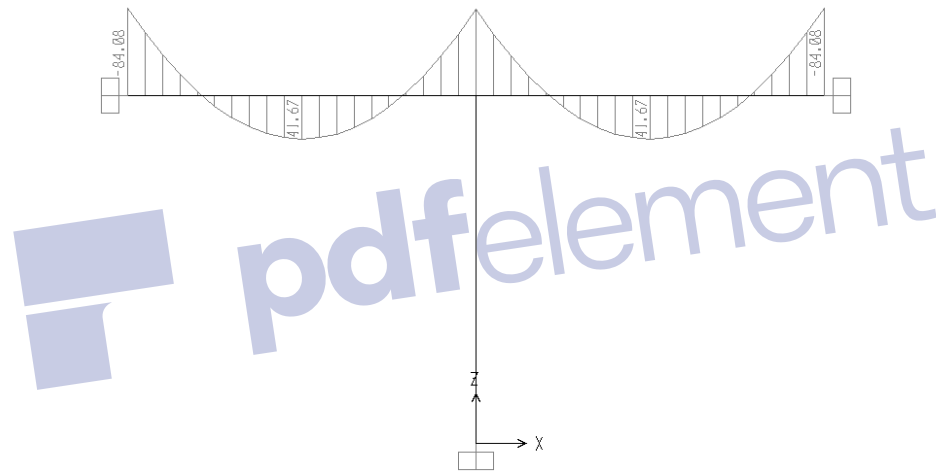


Diagramme du moment fléchissant (SAP 2000).

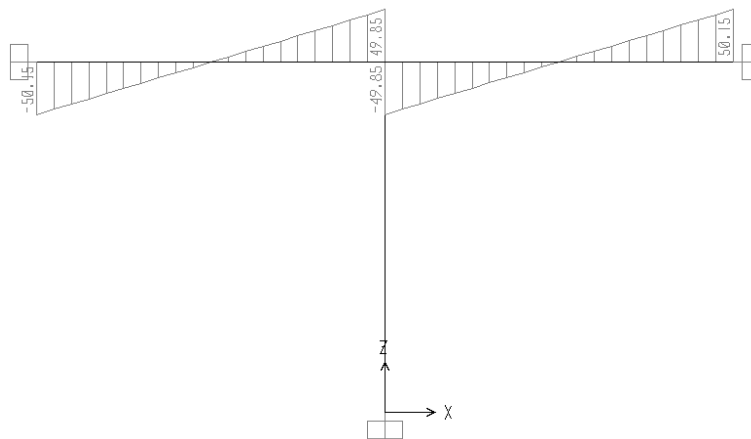


Diagramme de l'effort tranchant (SAP 2000).

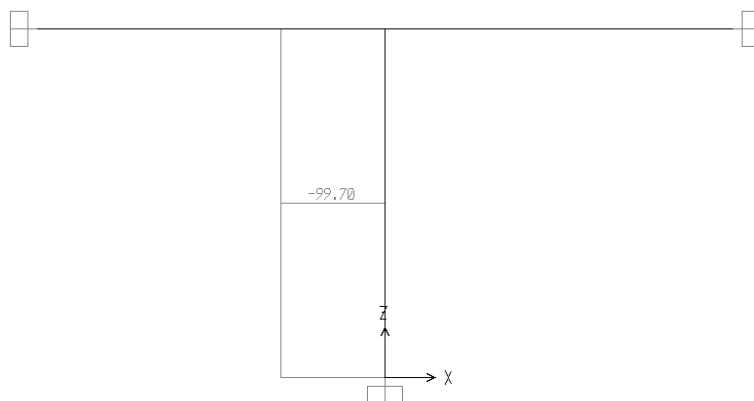


Diagramme de l'effort normal (SAP 2000).

 pdfelement

Bibliographie

- 1- C. PATTERSON and J.L. WEARING – MATRIX METHODE IN ENGINEERING MECHANICS, Departmental Report N° 65 The Department of Mechanical Engineering , The University Of Sheffield , ENGLAND.
- 2- FRANÇOIS FREY et JAROSLAV JIROUSEK - ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS: METHODE DES ELEMENTS FINIS, PPUR Presses Polytechniques, Amazon France.
- 3- GOURI DHATT et GILBERT TOUZOT - UNE PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS, Les Presses de l'Université Laval Québec Maloine S.A. Editeur Paris.
- 4- K.C. ROCKEY ; H.R. EVANS; D.W. GRIFFITHS; D.A. NETHERCOT – INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS , Editions Eyrolles 61 Bd Saint Germain 75005 Paris.
- 5- S.P. TIMOSHINKO –THEORY OF ELASTICITY, 2nd édition, New York Mc.Graw-Hill Book Company.